SAVEZ DRUŠTAVA MATEMATIČARA I FIZIČARA FNRJ

MATEMATIČKO FIZIČKI LIST

ZA UČENIKE SREDNJIH ŠKOLA

1

GODINA IX.
ZAGREB
1958 — 59

IZDAJE DRUŠTVO MATEMATIČARA I FIZIČARA NRH

»MATEMATIČKO-FIZIČKI LIST za učenike srednjih škola« izlazi u 4 broja po 40—48 stranica. Za vrijeme ferija list ne izlazi.
Pretplata za 4 broja iznosi Din 240. — Pojedini se broj prodaje po Din 60.— Pretplatu i narudžbe slati na adresu: »MATEMATIČKO-FIZIČKI LIST«, Zagreb **Ilica 16/III., pošt. pretinac 165 ili na čekovni račun broj 400-73-5-1884 — Pretplata se može slati i poštanskom uputnicom**

SADRŽAJ

	Strana
Supek dr. Ivan, Na putu do teorije jedinstvenog polja	1
Dimić Platon, Zanimljivosti iz naših najstarijih udžbenika	2
Tomaš Petar, Neutronski generator Instituta »Ruđer Bošković«	4
Mičković Arkadije, Neke primjene binarnog brojnog sistema	9
Kasumović dr. Marijan, Potresi i njihovo značenje u nauci i praksi	12
Берасимовић др Божидар, О приближном израчунавању квадратног корена	17
Бошковић Раде, О пантографу	21
Horvatić Krešo, Konveksne figure	23
Zanimljivosti i razno: Такмичење из физике за ученике средњих школа у НР Македонији. — Такмичење ученика трстеничке гимназије у математици и физици. — Pitagorin poučak u stripu — Električni hladnjaci — Dopuna aritmetičkim operacijama — Kako ćemo naći nepoznanice u zadatku a da ne postavljamo jednadžbe? — »Dokaz« da je i realan broj — Rad pogrešan, a rezultat točan — $24 \cdot 63 = 42 \cdot 63$ i slične jednakosti — Zanimljivo grafičko rješenje kvadratne jednadžbe	25
Nove knjige: D. S. Mitrinović, Važnije nejednakosti	32
Zadaci i rješenja: A. Zadaci iz matematike — B. Zadaci iz fizike — C. Rješenja iz matematike — D. Rješenja iz fizike	33
Vježbe za uč. viših razreda gimnazije	43
Vježbe iz matematike za učenike 8. razreda 8.-god. škole	47
Ukrštenica	3. str. omota

Uređivački odbor:

AHLIN FRANC, profesor VPŠ, Ljubljana
BANDIĆ IVAN, profesor VPŠ, Beograd
HRABAK FRANJO, dir. II. gimn., Zagreb
KOSMAJAC MOMČILO, prof. g., Cetinje
KRAJNOVIĆ MILAN, profesor, Zagreb
LAZIĆ MARKO, direktor VPŠ, Mostar
NIKOLOVSKI TOME, profesor, Skopje
ŠINDLER GUSTAV, profesor, Zagreb
VERNIĆ ELZA, profesor, Zagreb

Glavni urednici:

MARKOVIĆ dr. BRANIMIR, docent Prirodoslovno-matematičkog fakulteta Zagreb
ŠKREBLIN STJEPAN, h. prof. VPŠ, Zagreb

VLASNIK SAVEZ DRUŠTAVA MATEMATIČARA I FIZIČARA FNRJ
IZDAJE DRUŠTVO MATEMATIČARA I FIZIČARA NAR. REPUBLIKE HRVATSKE

Tisak Grafičkog zavoda Hrvatske

MATEMATIČKO-FIZIČKI LIST

ZA UČENIKE SREDNJIH ŠKOLA

GODINA IX. BROJ 1	ZAGREB	ŠKOL. GOD. 1958. — 1959.

Na putu do teorije jedinstvenog polja

Prof. dr. IVAN SUPEK, Zagreb

Do početka našeg stoljeća fizičari su vjerovali, da Newtonov zakon gibanja određuje čitavo zbivanje svijeta, tako da bi matematički genij u sistemu jednadžbi sagledao svu prošlost i budućnost. Ovu vjeru u mehaničku kauzalnost uzdrmao je Max Planck 1900. unijevši u teoriju zračenja nov element — kvantnu diskontinuiranost. Od Aristotela vrijedila je izreka: priroda ne čini skokova, i ta kontinuiranost sviju procesa leži u osnovi klasičnih zakona. Međutim, da se shvati emisija i apsorpcija svjetlosti u atomskom svijetu, trebalo je baš da se uvede neobična hipoteza o skokovima. No Nielsu Bohru, koji je 1913. proširio Planckovu misao, atomi mogu boraviti samo u nekim stacionarnim stanjima, koja se oštro razlikuju svojim osobinama, kao energijom i momentom vrtnje. Bohrovi postulati označili su svu duboku razliku između naše makroskopske stvarnosti i novog svijeta atoma. Polazeći od Bohrovih razmatranja, tada još mladi Werner Heisenberg 1925. našao je kvantnu mehaniku, koja je omogućila, da se proračunaju atomska svojstva i vjerojatnosti prijelaza iz jednih stacioniranih stanja u druga. Očito je, da je ideja skokova nespojiva s tradicionalnom kauzalnošću, gdje sve promjene nastaju nagomilavanjem sitnih učinaka. Nova atomska mehanika formulira svoje zakone kao statističke. Iako je nemoguće, da se u pojedinostima prati prostorno-vremenski tok, ipak nam teorija omogućava, da odredimo ponašanje velikog mnoštva, a u granici izlazi stoga klasična determiniranost.

Dok je Bohr primijenio kvantnu hipotezu na atomska stanja, Albert Einstein je Planckovu diskontinuiranost pronašao i pri djelovanju svjetlosti. Iako je od Fresnela bilo neosporno, da je svjetlost valna pojava, a Maxwellovom elektrodinamikom su ti valovi objašnjeni kao elektromagnetsko polje, Einstein je ipak pretpostavio, da se svjetlost sastoji od kvanata energije, t. zv. fotona. Ta je hipoteza unijela čudni dualizam vala i čestice u fiziku, a 1924. je jedna sretna de Brglieva inspiracija postavila taj paradoks za osnovni zakon mikrosvijeta. Otada su se fizičari navikli, da čestice prikazuju valovima, i polazeći od de Broglieve ideje, Schrödinger je 1925. utemeljio valnu mehaniku. Tako, iste godine, pronađene su obje kvantne mehanike, od kojih je prva, Heisenbergova, polazila od korpuskularne predodžbe atoma, a druga od de Broglievih valova materije, i ubrzo je Schrödinger pokazao, da su obje te teorije identične. U ujedinjenju obiju staza istraživanja pobijedila su gledišta Bohra i Heisenberga, jer se valovima materije nije moglo pripisati neposredno fizičko značenje, nego su to po Bornu bili »valovi vjerojatnosti«. Elektroni su i nadalje ostali čestice vanrednog malog promjera, ali njihovi prostorno-vremenski učinci mogu se izračunati iz valnih jednadžbi. Bitni je zaključak Kopenhagenske škole (Bohr-Heisenberg), da jednadžbe kvantne mehanike ne opisuju toliko nezavisne fizičke objekte, koliko djelovanja atoma na mjerne instrumente, pa je tu akt mjerenja primaran.

Veliki napredak učinio je Dirac 1932., kad je kvantnu hipotezu sjedinio sa specijalnom teorijom relativnosti. On je pronašao novu valnu jednadžbu i novu valnu veličinu, t. zv. spinor, odakle se mogla dobiti kao nerelativističko približenje stara Schrödingerova jednadžba. Jedna je od važnih konsekvenca Diracove jednadžbe bila egzistencija pozitivnog elektrona, i bio je to pravi triumf teorije, kad je takova čestica (pozitron) doista pronađena. Šest godina kasnije, također na osnovu teorijskih zaključaka, otkriva se mezon, a tim se broj elementarnih čestica naglo povećava. Svaka elementarna čestica (elektron, neutrino, proton, mezon i t. d.) može se opisati nekim valnim poljem, koje sadrži bitne osobine čestice kao masu i moment vrtnje, a ta su polja uzajamno povezana, kako to odgovara poznatim uzajamnim silama između čestica.

Heisenberg (1957.) je pošao sa stajališta, da mjesto mnogo polja treba zadržati samo jedno, i to ono spinorno polje, koje je Dirac uveo, ali se sada Diracova jednadžba mora proširiti, tako da obuhvati i pojavu više različitih čestica. Važno je, da se iz spinornih polja mogu izgraditi druga polja, tako i elektromagnetska, pa proširena Heisenbergova jednadžba automatski daje djelovanje između elektrona i elektromagnetskog polja; no još i više, jednadžba bi trebala dati i mase svih elementarnih čestica kao i njihove uzajamne sile. Međutim, matematički je postupak u Heisenbergovu radu dosta mutan, i mjesto strogih računa dolaze više nagađanja. Sam Heisenberg zove svoj rad tek jednim programom, a buduća matematička analiza mora pokazati, što strogo izlazi iz nove jednadžbe. Uporedba strogih računskih rezultata s empiričkim činjenicama odlučit će o valjanosti nove teorije. No bez obzira na taj ishod, Heisenbergova je ideja vrlo duboka, i po svoj prilici treba i dalje ići tim putem, da se raznolikost elementarnih čestica svede na jedinstveno polje.

Zanimljivosti iz naših najstarijih udžbenika

PLATON DIMIČ. Skopje

1

U najstarijem hrvatskom udžbeniku aritmetike, koji je pod naslovom »Arithmetika horvatszka« izdao u Zagrebu 1758 godine Mihalj Šilobod, ukazuje se, pored ostalog, i na jedan metod za dobijanje rešenja algebarskih problema prvog stepena sa dve nepoznate, kojim se može koristiti i onaj ko ne zna ništa o jednačinama. Taj metod (tzv. regula falsi), prikazan na jednom primeru, izgleda ovako.

Pelda. Dve ſzeſztre: Bara i Mara noſzile ſzu jajcza na proday: Buduche pak opitane: kuliko vſzaka ima? Ja (veli Bara) imam tuliko: da akobi mene Mara dala 8 takbi obadve jednako imale. Ako bi ja Mare dala ſzamo 5. takbi ona tri puti tuliko imala kulikobi mene oſztalo. Povechmi proſzimte kuliko vſzaka ima?

Da bi se zadatak rešio, kaže pisac, treba najpre »staviti na Baru« jedan proizvoljan broj, recimo 10 (vidi niže »Rachun«), iz čega, prema prvom od navedena dva uslova, proizlazi da bi u tom slučaju Mara morala imati $10 + 2 \cdot 8 = 26$ jajca. No posle toga, ako bi Bara dala Mari 5 jajca, ova ne bi imala tri puta više nego Bara, kao što se to u drugom od postavljenih uslova zahteva, nego bi imala za 16 više od toga ($5 \cdot 3 + 16 = 26 + 5$). Zato, prema uputstvu pisca, treba »staviti pod A« 16 sa znakom m.

Zatim, kaže se dalje u ovoj knjizi, treba »staviti na Baru« više, recimo 20. Tada bi, na osnovu prvog od navedenih uslova, Mara morala imati $20 + 2 . 8 = 36$ jajca, ali u tom slučaju opet drugi od navedenih uslova ne bi bio zadovoljen, jer $(20 — 5) .3$ ne iznosi $36 + 5 = 41$, nego iznosi 45, pa bi stoga sad pod A trebalo staviti 4 sa znakom v.

Zatim-kaže se dalje u ovoj knjizi-iſte falinge povekſſay z-krivemi broji na kris. To jeſzt 16 povekſſay z-20, a 4 z-10.I kayti jedna falinga je m. a druga v., zato povekſſane na kris broje priday, y pridane razdeli z-pridanemi falingami, to jeſzt z-20.izide:Bare 18 jajecz. Kak vidiſ ovde

Rachun

A		B	C
m. 16	·	10	26
v. 4		20	36
20		320	
		40	
		20 | 360 | 18	
		20	
		160	
		160	

I, zaista, na ovaj način se došlo do tačnog rezultata. No, obrazloženje navedenog postupka u knjizi se nigde ne daje, nego se isti samo prikazuje još na nizu primera.

Objasni sam ovaj postupak, t. j. uopšti ga za sve slučajeve kada dati uslovi dovode do dve jednačine sa dve nepoznate, i dokaži njegovu opravdanost.

2

U najstarijem srpskom udžbeniku aritmetike, koji je pod naslovom „Новаѧ сербскаѧ ариѳметика“ izdao u Mlecima 1767 godine Vasilije Damjanović, poklanja se vrlo mnogo mesta primeni pravila trojnog u trgovačkim računima. U vezi s tim se navodi velik broj primera, no ti se primeri ne rešavaju sasvim onako kako bismo ih mi danas rešavali, nego po izvesnom drugojačem postupku. Taj postupak se vidi iz sledeća dva primera.

Primer 1

1 комад за 2 фо 10 кр · · · · · · · · що · · · · · $47\frac{5}{8}$

47 37
95 15
7 56

103 11 1 чет

Primer 2

$2\frac{2}{3}$ рива за $12\frac{3}{4}$ фо: пощо стачеть $49\frac{5}{6}$ рива!

$2\frac{2}{3}$ $12\frac{3}{4}$ $49\frac{5}{6}$ 2

8 299
8 51
64 299

51 3
264 1495 46
3427 15249 526 4
15249 | 238 1700 | 26 36 | 9
6444 644 64 | 16
66 6

Чини 238 фо: $26\frac{9}{16}$ нов:

Imajući u vidu da je jedna forinta iznosila 60 krajcara, ili 100 novčića, a jedna krajcara 4 četvrtaka, objasniti kako se u ova dva slučaja došlo do pravilnog rezultata.

Najstariji slovenački udžbenik aritmetike, koji je pod naslovom »Bukuvze ſa rajtengo« izdao u Ljubljani 1781 godine Marko Pohlin, nije mnogo obiman, pa ipak u njemu nije propušteno da se na kraju, posle svega ostalog, po običaju onog doba, iznese nešto iz zabavne matematike. Tako u njemu »VI Perstavk« glasi:

Uganiti, kedu je is vezh ludy kako rezh ſmaknil, ali perkryl.

1) Se moreju ti ludji v'eno vorengo postaviti, da se ve, kedu je to perva, ta druge ali ta trete.

2) Ukaſhi temu, katir ſa tatu ve, de njegovo numero is 2.multiplicira, inu potler 5. addira.

3) To shumo, katiri se is addicijona vonpersla, puſti is 5.multiplicirati.

4) Puſti si to ſadno shumo povedati, od katire, ke to pervo na desni roki prezh verſhesh, inu od te druge zifre, katira she zhesoſtane, 2. subtrahirash, tok bosch ſvedel na krajſenemu meſtu tat ſtojy, katir je petizo ſmaknil.

Prema tom uputstvu, dakle, ako bi onaj, ko je sakrio izvesnu stvar, bio, recimo, sedmi po redu, njemu bi se naložilo ustvari da izvrši sledeći račun:

$$(7 \cdot 2 + 5) \cdot 5 = 95$$

A kada bi on objavio nađeni rezultat, onaj što izvodi veštine samo bi odbacio poslednju peticu, a od preostale brojke bi oduzeo 2, pa bi dobio 7, tj. redni broj onog koji je od svih prisutnih u pitanju.

Objasni zašto je navedeno uputstvo za otkrivanje traženog broja dobro.

Neutronski generator Instituta »Ruđer Bošković«*

PETAR TOMAŠ, Zagreb

Neutron je uz proton osnovna čestica od koje je sagrađena atomska jezgra. Slobodni neutron, onaj koji nije vezan u jezgri, nije stabilan, već se raspada na proton uz emisiju β čestica i neutrina, s poluvremenom raspada od oko 13 minuta.

Kako je neutron praktički bez naboja, to on djeluje vrlo slabo na elektrone u atomu, ali mu se zato ne suprotstavljaju nikakve električne sile u njegovu međudjelovanju s atomskom jezgrom. To je razlog da atomska jezgra relativno lako zarobljava neutron koji joj dođe na dohvat i stupa s njim u međureakciju. Zato ima relativno malo slobodnih neutrona i tek približno svaki milionti od njih stigne da se raspadne svojom prirodnom radioaktivnosti.

Veće gustoće neutrona u internuklearnom prostoru mogu se naći samo u blizini izvora neutrona. Postoji više nuklearnih procesa koji nam omogućuju izvlačenje neutrona iz zatvora jezgre.

Praktički se koriste nuklearne reakcije i cijepanje teških jezgara.

Sredstva koja nam pri tom služe su: a) radioaktivni izotopi, b) reaktori i c) akceleratori.

a) Prvi neutroni dobiveni su bombardiranjem berilija α česticama iz prirodnih radioaktivnih elemenata. 1 g radija pomiješan s nekoliko grama berilija daje oko $1{,}7 \cdot 10^7$ neutrona u sekundi. 1 g radija u ravnoteži sa svojim produktima emitira $1{,}85 \cdot 10^{11}$ čestica u sekundi. Prema tome oko svakih 10 000 α čestica emitira 1 neutron. Loše strane ovakvog izvora neutrona su jaka popratna i veoma štetna γ zračenja

---

* Pobliže o tome gledaj: M. Paić, K. Prelec, P. Tomaš, M. Varićak i B. Vošicki: Cockcroft i Walton akcelerator od 200 kV za dobivanje neutrona. Glasnik mat.-fiz. i astron. T. 12 (1957) No. 4. str. 269–287.

upotrebljenih izotopa. Osim toga dobiveni neutroni nisu monoenergetski, već posjeduju široki spektar energije od oko 1 do 11 MeV-a, a cijene su prikladnih prirodnih radioizotopa vrlo visoke.

b) Reaktori su uređaji u kojima se odigrava kontrolirana fisija, cijepanje teških jezgara. Cijepanjem urana i plutonija u reaktorima su se dobili tokovi neutrona od preko 10^{14} neutrona u sekundi po cm^2. Toliki broj neutrona u reaktoru nastaje zahvaljujući lančanim reakcijama. Četiri fisije daju prosječno 10 neutrona. Nuklearni reaktori su u posljednjih 15 godina omogućili snažan razvoj neutronske fizike, naročito u područjima tzv. termalnih i rezonantnih energija.

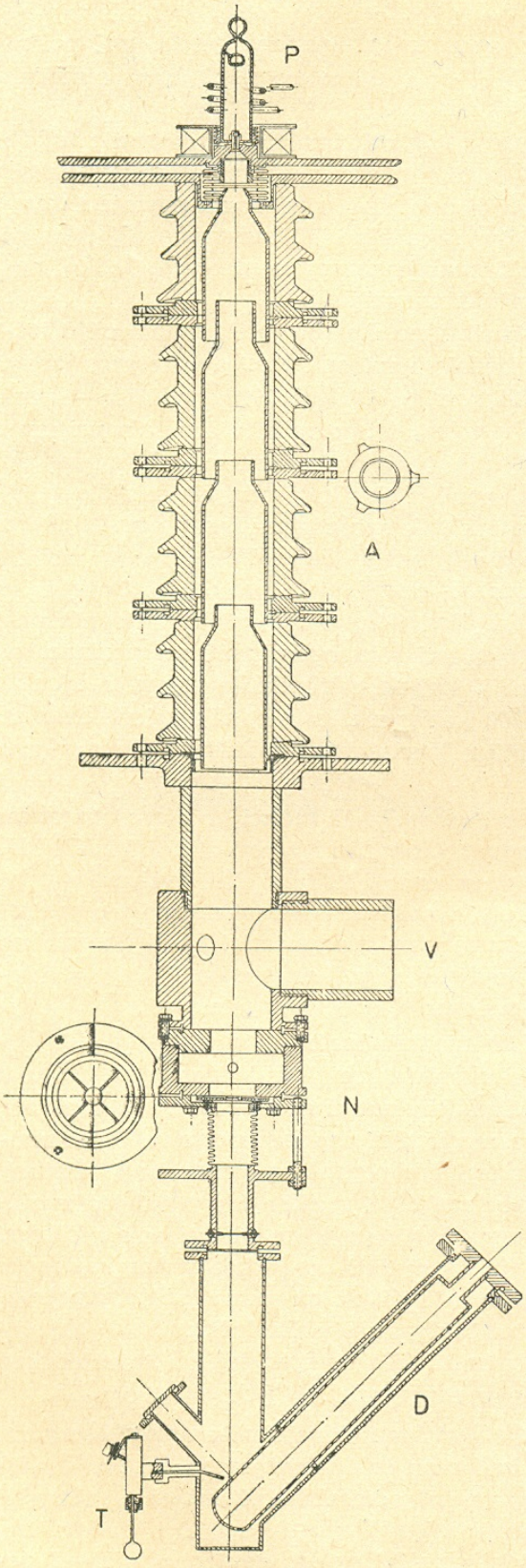
c) Akceleratori omogućavaju dobijanje brzih iona, koji na prikladnom cilju izazivaju transmutacije atoma kod kojih se oslobađaju neutroni. Prvi akcelerator kojim su vršene transmutacije atoma izgradili su Cockcroft i Walton 1932. godine, — deset godina prije izgradnje prvog reaktora. Bio je to na istom mjestu i u isto vrijeme, kad je Chadwick dokazao iz nuklearnih reakcija postojanje neutrona. Interesantno je spomenuti, da je u isto vrijeme američki naučenjak Urey prviput odvojio teški vodikov izotop-deuterij. Bombardiranjem deuterijevih spojeva deuteronima, Oliphant i Harteck u zajednici s Rutherfordom pokazali su dvije godine kasnije, da je moguće dobiti snažne izvore neutrona i s malim energijama projektila, kojima se izvodi transmutacija. To je tzv. D—D reakcija. Kod takove transmutacije deuterona deuteronom postoji približno ista mogućnost da pri tom bude emitiran neutron uz oslobađanje energije od 3,3 MeV, ili proton i tricij uz oslobađanje energije od oko 4 MeV. Otprilike svaki 2.10^6 deuterona od 200 keV na cilju od teškog leda izaziva jednu D—D reakciju. Struja deuterona od 200 μA energije 200 keV će prema tome dati više od 10^8 neutrona u sekundi.

Ako deuteron zamijenimo s tricijem dobit ćemo D—T reakciju. Vjerojatnost za ovu reakciju je 100 puta veća, a optimalni napon ubrzanja leži između 100 i 200 kV. Emisija neutrona se zbiva uz oslobađanje veće energije, tako da neutroni imaju energiju oko 14 MeV. Veći akceleratori, s drugim nuklearnim reakcijama mogu dati snažnije tokove neutrona. Najnoviji takovi akceleratori mogu dati i do 10^{17} neutrona u sekundi. U zagrebačkom ciklotronu će se moći bombardiranjem berilijuma s deuteronima od 16 MeV postići otprilike jedan neutron na 200 deuterona.

Ne može se reći, koji je od ovih, naročito snažnih izvora neutrona važniji. Izotopi su odigrali veliku historijsku, uz male akceleratore, čak i pionirsku ulogu u razvoju neutronske fizike. Veliki i skupi uređaji, kao veliki akceleratori ili reaktori, daju nam jake tokove neutrona, ali nam ne mogu dati monoenergetske brze neutrone, kao što to može mali akcelerator, a uz to i bez popratnog, prodornog i štetnog zračenja. Osim toga neutroni dobiveni pomoću različitih mašina mogu uslijed svojih energija imati posve različita svojstva. To je razlog zbog koga ni najsnažniji izvori neutrona ne mogu za pojedine vrste istraživanja zamijeniti mali akcelerator, koji može biti i do milijardu puta slabiji. Jedino je ispravno reći, da se prema prilici i potrebi svi ti izvori neutrona međusobno izmjenjuju i nadopunjuju. Budući da mali akceleratori danas isključivo služe kao izvori neutrona (što nije slučaj na primjer kod velikih mašina) to se za njih uvriježio naziv n e u t r o n s k i g e n e r a t o r.

Ovakovi neutroni su naročito pogodni za ispitivanje svojstva atomskih jezgara. Neutroni nam ovdje predstavljaju vjesnike koji nam iz dubine jezgre otkrivaju njezine tajne, koje još ne poznajemo. Sličnu ulogu su odigrala već zračenja atomske ljuske za upoznavanje građe atoma.

Spoznaja, da se s malim energijama dobije veliki prinos neutrona iz D—D reakcije, potakla je izgradnju niza malih akceleratora još prije drugog svjetskog rata. Naročito su prikladni akceleratori do 200 kV, jer se mogu ostvariti s relativno malim sredstvima, a prikladni su i za primjenu D—D i D—T reakcije. Da bi što prije, a



Sl. 1

uz to što manje materijalnih sredstava došli do snažnih izvora brzih neutrona, naročito monoenergetskih i bez popratnih zračenja, sagrađen je i radi u Institutu »Ruđer Bošković« (IRB) takav neutronski generator za 200 kV, na principu akceleratora po Cockcroft-Waltonu.

Neutronski generator u IRB ima ove sastavne dijelove: visokofrekventni izvor iona deuterija, izvor visokog napona od 200 kV za ubrzavanje iona, akceleratorska cijev s ionsko optičkim sistemom, uzemljeni dio cijevi s ciljem na kom se zbivaju nuklearne reakcije i vakuumski sistem.

Principijelna shema generatora prikazana je na slici 1.

Prvi je uvjet za dobivanje jakog snopa iona, da se u čitavom uređaju uspostavi visoki vakuum. Glavni zadatak visokog vakuuma jest da stvori slobodan put našim projektilima od njihovog izvora do cilja. Kod pritiska 10^{-5} mm Hg srednji slobodan put je približno 500 cm. Dakle, sudare projektila s ostacima plinova u cijevi dugoj približno 1,5 met. možemo zanemariti.

Vakuum sisaljke su priključene na uređaj kod V (sl. 1) preko stupice s tekućim zrakom, koja ima ulogu da se u njoj kondenziraju pare ulja koje bi iz sisaljke prodirale u uređaj i onečistile cilj. Svi vakuumski spojevi izvedeni su tako da se prema potrebi mogu rastaviti. Proračun brzine pumpanja sisaljke zasniva se na tome da se u ionskom izvoru održava radni, dinamički pritisak od oko 10^{-2} mm Hg, a u akceleratorskoj cijevi reda veličine 10^{-5} mm Hg, uz potrebno doticanje deuterija od 23 cm^3 sat^{-1} kod temperature od 20^0 i pritiska od 1 atmosfere.* Ako se zanemare sve eventualne produšnosti, brzina pumpanja, nakon što se već postigao radni pritisak, odgovara brzini difuzije deuterija u akceleratorski sistem. Jednostavni račun pokazuje, da ta brzina iznosi oko 300 litara u sekundi.

Izvor iona je staklena posuda P (sl. 1) iz pyrexa, ispunjena deuterijem pod pritiskom 10^{-2} mm Hg u kojoj se pomoću visoko frekventnog oscilatora stvara Teslin

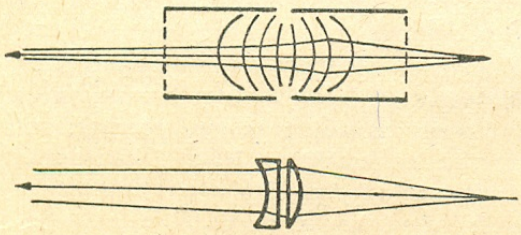
* O postizavanju visokog vakuuma vidi članak od M. Varićak u Mat.-fiz. listu god. 1955./56., str. 44.

izboj bez elektroda. Deuterij se dobiva elektrolizom teške lužine NaOD otopljene u teškoj vodi D_2O. Elektrolizer je građen tako, da se pri postignutom normalnom pritisku deuterija u rezervoaru, elektroliza automatski prekida. Kad se utroškom plina taj pritisak smanjuje, kontakt se automatski ponovno uspostavlja i elektroliza održava u rezervoaru deuterija normalni pritisak.

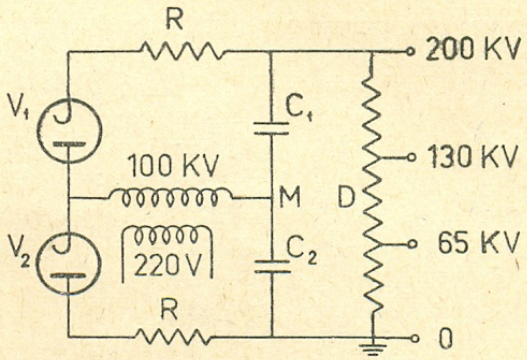
Elektrolizer se nalazi na potencijalu zemlje, hladi se tekućom vodom, da se spriječi svaki gubitak teške vode isparivanjem. Tako dobiven deuterij se ne dovodi direktno u izbojnu posudu. Dovodna cijev deuterija je na jednom mjestu zatvorena neprodušno paladijevom cijevčicom, koja se može grijati. Prema tome može deuterij stići u izbojnu posudu samo difuzijom kroz paladij, koja je uslovljena razlikom tlakova u rezervoaru deuterija i u izbojnoj posudi. Paladij ima pogodno svojstvo, da kod viših temperatura propušta samo čisti vodik odnosno deuterij te da brzina difuzije ovisi o njegovoj temperaturi. Prema tome se temperaturom paladija može regulirati doticanje deuterija u ionski izvor, da bi se u njemu postigao optimalni pritisak.

Izbojna posuda P je obavijena zavojnicom visoko-frekventnog oscilatora snage nekoliko stotina vata i frekvencije nekoliko desetaka megaherza. Visokofrekventno električno polje koje nastaje uslijed promjenljivog magnetskog polja u uzvojnici ionizira deuterij i stvara oblak vodikovih jezgri deuterona. Ionizacija se povećava još i time, što se pomoću posebne zavojnice pri dnu izbojne posude stvara i jedno stalno magnetsko polje. To ih polje magnetske indukcije od 400 gausa sili na još zamršenije gibanje i postizavanje većeg broja sudara.

Izbojna posuda mora biti hlađena.



Sl. 2.



Sl. 3.

Tzv. napon izvlačenja od nekoliko kV, narinut na krajeve ionskog izvora daje deuteronima brzinu prema uskom otvoru na dnu posude. Ioni se u obliku kanalnih zraka provlače kroz taj otvor i ulaze u akceleratorsku cijev A (sl. 1), koja ima zadatak da primljene ione ubrza, fokusira i usmjeri na cilj. Budući da je za rad akceleratora važno, da ioni ulaze u os akceleratorske cijevi, izvor je tako smješten da se može precizno centrirati.

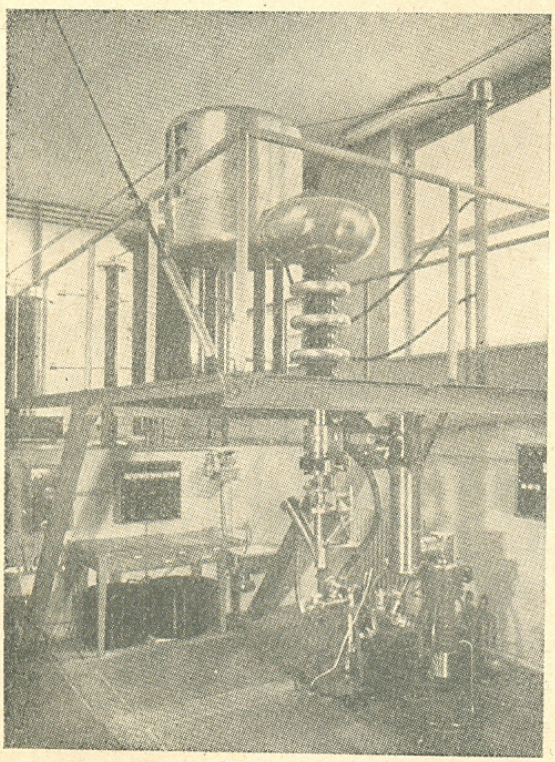
Akceleratorska cijev je načinjena iz četiri šuplja keramička izolatora, na koje su nalijepljeni nosači četiriju cilindričkih elektroda, koje tvore ionski sistem leća. Osim uloge ubrzavanja iona, prva leća ima naročito izrađen zadatak fokusiranja. Ona, prilično divergentan snop iona, koji dolaze iz izvora mora pretvoriti u konvergentan, koji udara u cilj. Ostale leće imaju mnogo manji utjecaj na fokusaciju snopa, jer, kad ioni njima prolaze, imaju već znatne brzine, pa ih se teže usmjerava.

Fokusirajuće djelovanje ionske leće prikazano je na sl. 2. Ionsku leću sačinjava električno polje sa svojim, ekvipotencijalnim površinama, koje čine dvije rotaciono simetrične šuplje elektrode. Jednostavnosti radi možemo ih smatrati cilindrima jednakih dijametara, i ovome odgovara približno optički sistem od jedne jače konvergentne i druge slabije divergentne leće. Prva leća skuplja divergentan snop, druga

ga malo raspršuje, ali čitav sistem u cjelini je konvergentan. Sasvim analogno djelovanje ima ionska leća na snop iona, što je razumljivo i iz poznavanja djelovanja električnog polja. Električno je polje uvijek okomito na ekvipotencijalne plohe. U području prvog cilindra električne sile dakle vuku čestice k osi leće, u drugom od osi. No, jer je brzina čestica u prvom clindru manja od one u drugom, to će i djelovanje prvog cilindra na čestice biti jače, nego li drugog. I takva ionska leća je u cjelini, dakle, konvergentna. Može se pokazati, da za ionsku i optičku leću vrijede analogne zakonitosti.

Visoki istosmjerni napon potreban za napajanje neutronskog generatora daje visoko naponski ispravljač. To je Delon-Greinackerov spoj, čija je shema prikazana na sl. 3. Visokonaponski transformator daje napon od 0—100 kV. Za vrijeme svake poluperiode nabija se preko visoko-naponske ispravljačice V_1 ili V_2 jedan od kondenzatora C_1 i C_2 na približno 100 kV u odnosu na srednju točku kondenzatora. Na krajevima kondenzatora dobije se prema tome istosmjerni i približno dvostruki maksimalni napon transformatora. Takav je uređaj naročito ekonomičan, jer su pojedini njegovi dijelovi opterećeni samo s polovicom iskoristivog napona.

Taj je napon preko posebnog djelitelja napona D porazdijeljen na pojedine ionske leće na koje se dovodi preko njihovih nosača. Za mjerenje visokog napona služi serija otpora od 200 MΩ, koji su hlađeni uljem, dok je djelitelj napona hlađen komprimiranim zrakom.



Sl. 4.

Posljednja ionska leća je uzemljena, pa se nakon prelaza kroz nju deuteroni više ne ubrzavaju. Akceleratorska se cijev nastavlja u jednu cijev od željeza N (sl. 1), koja je preko ventila vezana za cilj i za vakuum sistem. Osim toga ona sadrži uređaj za kontrolu širine i smjera snopa, koji se sastoji od četiri izolirana segmenta od kojih je svaki preko mikroampermetra spojen sa zemljom. Nije li snop dobro centriran ili dovoljno uzak, ioni udaraju više na segmente, pa treba poboljšati fokusaciju ionskog snopa. Na cijevi je smješten i prozor kroz koji se može promatrati snop.

Cilj se sastoji od cijevi građene u obliku Dewarove posude D (sl. 1) smještene pod kutem od 45 stupnjeva prema snopu deuterona, a napunjena je tekućim zrakom radi hlađenja. Dio upadnih deuterona stijena cilja apsorbiran i oni s upadnim deuteronima iz snopa, daju D—D reakciju. Cilj je to efikasniji, što je u njemu veći broj jezgri deuterija prema broju elektrona ili drugih težih jezgri u sloju debljine dosega deuterona: Zato je sloj teškog leda efikasniji od apsorbiranog deuterija. Teška voda se nalazi u tikvici T (sl. 1). Ona kroz posebni ventil i bakrenu cijevčicu može ispariti u cijev s ciljem, gdje udara snop iona, i na njemu uslijed naglog hlađenja stvori sloj leda debljine nekoliko mikrona. Ako se želi raditi s D—T reakcijom, onda se kao cilj obično upotrebljava apsorbirani tricij u tankom sloju cirkona ili titana. Na sl. 4. vidi se fotografija čitavog akceleratora.

Neke primjene binarnog brojnog sistema

ARKADIJE MIČKOVIĆ, Mostar

Iako mi danas provodimo sve račune u dekadnom brojnom sistemu — gdje je baza broj 10 — a da to nikad posebno ne naglašavamo, ne smijemo zaboraviti postojanje i drugih brojnih sistema koji su u razvoju matematike odigrali veliku ulogu.

Spomenimo samo kako važnu ulogu igra već od starih Babilonaca uvedeni seksagezimalni sistem sa bazom 60. I danas taj sistem koristimo kod računanja sa uglovima i vremenskim razmacima. Osvrnut ćemo se ovdje samo na neke primjene *binarnog* brojnog sistema. Binarni brojni sistem je onaj sistem kome je baza broj 2. Dakle, osnovna grupa ima dva elementa. Najprije ćemo pokazati kakva veza postoji između našeg uobičajenog dekadnog brojnog sistema i binarnog sistema t. j. kako se vrši prelaz iz jednog u drugi sistem.

Neka nam je zadan neki broj u dekadnom brojnom sistemu, recimo 46. Pita se kako ćemo taj broj prevesti, odnosno napisati u binarnom sistemu. Simbolički naše pitanje glasi:

$$(46)_{10} = X_2 \tag{1}$$

gdje indeksi pokazuju u kojem brojnom sistemu pišemo broj. Pita se, dakle, kako izgleda desna strana u (1) t. j. X_2. Odgovor na naše pitanje je lagan ako se podsjetimo što zapravo znači napisati neki broj u nekom brojnom sistemu. To znači prikazati ga u obliku polinoma čiji su članovi potencije baze dotičnog sistema, a koeficijenti su tih članova sve znamenke tog sistema osim broja koji je baza tog sistema. U binarnom sistemu su koeficijenti članova polinoma brojevi 0 i 1, a baza je broj 2. Treba dakle napisati polinom sa bazom 2. To ćemo učiniti ovako.

Napisat ćemo prvo zadani broj 46. Sada ćemo pogledati koja je najviša potencija broja 2 sadržana u zadanom broju, kod nas u broju 46. Kod nas je to broj 2^5. Ostatak je 14. Sa ovim ostatkom provodimo isti postupak. Slijedeća potencija od 2 je broj 2^3, a ostatak je 6 u kome se sadrži potencija 2^2. Slijedeći ostatak je 2 a to je 2^1. Imamo dakle ovaj prikaz:

$$(46)_{10} = 1 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 = (101110)_2 \tag{2}$$

ili

$$46 = 101110 \tag{3}$$

sa napomenom da je desna strana u (3) prikaz lijeve strane u binarnom sistemu. Iz izgleda desne strane u (2) ili (3) vidi se ujedno razlog zašto taj sistem nije prihvaćen kao podesan.

Kad smo tako riješili pitanje prevođenja brojeva iz našeg svakodnevnog sistema u binarni sistem pređimo sada na spomenute primjene.

Prva primjena. — Množenje brojeva.

Uzmimo na pr. da treba pomnožiti broj 74 sa 95. Napisat ćemo brojeve 74 i 95 na čelu dvaju stupaca. Imamo dakle:

74	(95)
37	190
18	(380)
9	760
4	(1520)
2	(3040)
1	6080
	7030

Sada dijelimo 74 sa 2 a istovremeno množimo broj 95 s 2. Dakako da kod ovog dijeljenja brojeva prvog stupca sa 2 dobijamo i ostatke, ali o njima ne ćemo voditi računa. Da dođemo do rezultata precrtat ćemo u drugom stupcu sve one brojeve koji stoje nasuprot odgovarajućih parnih brojeva u prvom stupcu. Kod nas su to brojevi: 95, 380, 1520, 3040 a koji leže nasuprot brojeva: 74, 18, 4, 2. Sada ćemo preostale brojeve u drugom stupcu sabrati i taj zbir nam predstavlja proizvod brojeva $74 \cdot 95$. Kako da objasnimo provedeni postupak? Predstavimo broj 74 u binarnom sistemu pa ga pomnožimo sa brojem 95. Imamo tako:

$$74 \cdot 95 = (1 \cdot 2^6 + 0 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0) \cdot 95 = (64 + 0 + 0 + 8 + 0 + 2 + 0) \cdot 95 =$$
$$= 6080 + 0 + 0 + 760 + 190 + 0 = 7030$$

Kako vidimo kad broj 74 napišemo u binarnom sistemu ne pojavljuju se potencije 2^5, 2^4, 2^2, 2^0 pa i nemamo djelimičnih proizvoda tih potencija sa brojem 95. Zato smo te proizvode u drugom stupcu precrtali. Naravno, poradi komutativnog zakona dobili bismo isti proizvod množeći broj 95 sa 74. Može se dogoditi prema prirodi brojeva da su članovi prvog stupca sami neparni brojevi. Tada u drugom stupcu nećemo ništa precrtavati, nego samo sabrati djelomične proizvode. Kao na pr. $63 \cdot 89$.

Na kraju ove primjene napomenut ćemo da se ovaj postupak prilikom množenja nekada vrlo često primjenjivao, ali je danas pao u zaborav.

Druga primjena. Ona se tiče jedne veoma zanimljive *igre*. Ova igra vezana je uz jednu anegdotu koju ćemo u kratkim crtama iskazati. Neki siromašni student bio je veoma jak u matematici, ali dosta slab u poznavanju svijeta. Štedeći, uspio je sakupiti izvjesnu sumu novca da bi mogao poći na studije u inozemstvo na jednu godinu. Na brodu koji ga je vodio u Ameriku upane on u grupu profesionalnih igrača, poče sa njima igrati i u toku jedne večeri izgubi u igri (pokeru) sav ušteđeni novac. Dakako da se rastužio i počeo očajavati. No tračak nade zadržao je u sebi nadajući se da će mu odlično znanje matematike pomoći. Tako je i bilo. Sutradan se on ponovo sastane sa istim društvom i reče svojim suigračima, da je sasvim pravilno što je izgubio jer da nije upućen u igranju pokera. Međutim nastavi: Da li želite igrati neku drugu igru? Suigrači misleći da će im njihova vještina i iskustvo biti dovoljna garancija za bilo kakvu igru prihvate ponudu bez razmišljanja.

Tada siromašni student postavi na stol izvjestan broj malih štapića (drvca šibice ili bilo kakvi predmeti) i obrati se slijedećim riječima jednom od suigrača: »Evo možete uzeti koliko hoćete štapića iz bilo koje hrpe, od jednog štapića do čitave hrpe. Poslije vas ja ću također uzeti štapiće. Tako ćemo nastaviti naizmjenično uzimati štapiće dok ih nestane na stolu. Onaj ko zadnji podigne štapić(e) gubi partiju!« Student je na ovaj način dobijao partiju po partiju.

Prisutni članovi ulagali su sve više i više misleći da će ipak dobiti. No sve je bilo uzalud. Student je na večer ne samo povratio izgubljeni novac, nego je za jednu večer zaradio toliko novaca da je mogao ostati više godina u inozemstvu. Ustvari prema zadnjim vijestima on je još uvijek tamo.

Naravno, detaljno objašnjenje mehanizma ove igre dosta je dugo. No ipak ćemo nastojati objasniti ovu igru, jer mislimo da će se mnogi od naših čitalaca i sami zabavljati sa igrom. Uzmimo dva igrača i označimo ih sa A i B i navedimo nekoliko situacija koje dobivaju a koje se pojavljuju pred sam kraj igre.

1-a situacija: || || 2-a situacija: ||| |||

3-a situacija: ||| || | 4-a situacija: || || | |

Imamo dakle u 1-oj i 2-oj situaciji dvije hrpe, u 3-oj tri a u 4-oj situaciji 4 hrpe. U svakoj od ove četiri situacije A dobija ako navede B da vuče prvi. Razmotrimo svaku situaciju posebno.

1-a situacija ... (a) Ako B uzme 1 drvce iz prve hrpe, A uzima čitavu 2-u hrpu i naravno B gubi jer zadnji uzima. (b) Ako B uzme čitavu 1-u hrpu, A uzima 1 drvce druge hrpe i B opet gubi budući zadnji uzima. Ovo su sve mogućnosti u 1-oj situaciji.

2-a situacija ... (a) Ako B uzme 1 drvce iz prve hrpe, A uzima 1 drvce iz druge hrpe. tako da dobijemo 1-u situaciju koju smo upravo objasnili. (b) Ako B uzme dva drvca iz prve hrpe, A uzima čitavu drugu hrpu čime opet dobija. (c) Uzme li napokon B čitavu prvu hrpu, A uzima dva drvca iz druge hrpe i opet dobija. Ovo su sve mogućnosti u 2-oj situaciji.

3-a situacija ... (a) Ako B uzme 1 drvce iz prve hrpe, A uzima jedino drvce u trećoj hrpi čime dobijamo 1-u situaciju. (b) Ako B uzme dva drvca iz prve hrpe, A će uzeti 1 drvce iz druge hrpe da bi dobio. (c) Ako B uzme čitavu prvu hrpu A uzima čitavu drugu hrpu. (d) Ako B uzme jedno drvce iz druge hrpe, A uzima dva drvca iz prve hrpe. Zatim svaki uzima jedno drvce i B zadnji uzima. (e) Ako B uzme čitavu drugu hrpu, A uzima čitavu prvu hrpu. (f) Ako B uzme jedino drvce iz treće hrpe, A uzima jedno drvce iz prve hrpe i timę dobijamo 1-u situaciju. Ovo su sve mogućnosti u 3-oj situaciji.

4-a situacija ... (a). Ako B uzme jedno drvce iz prve hrpe, A uzima čitavu drugu hrpu. (b) Ako B uzme čitavu prvu hrpu, A uzima jedno drvce iz druge hrpe. (c) Ako B uzme jedino drvce treće ili četvrte hrpe, A uzima jedino drvce četvrte ili treće hrpe i tako dobijamo 1-u situaciju.

Spomenimo odmah da ove četiri situacije nisu jedine koje se mogu pojaviti ali su dovoljne da objasne igru. Prikažimo sada broj drvaca u svakoj hrpi u binarnom sistemu.

1-a situacija:	1-a hrpa	10
	2-a hrpa	10
	Ukupno	20

2-a situacija:	1-a hrpa	11
	2-a hrpa	11
	Ukupno	22

3-a situacija:	1-a hrpa	11
	2-a hrpa	10
	3-a hrpa	1
	Ukupno	22

4-a situacija:	1-a hrpa	10
	2-a hrpa	10
	3-a hrpa	1
	4-a hrpa	1
	Ukupno	22

Kako vidimo zbir svakog stupca (ostavljen u ne-binarnom obliku!) je broj čije su sve znamenke *parni* brojevi (0 je paran broj!) a nikada brojevi 1 ili 3. Eto u tome je tajna igre. Ako A pozna igru a B ne pozna, onda A može sebe staviti u dobijajuću poziciju već u početku igre a evo kako. On će brojeve drvaca u svakoj hrpi izraziti u binarnom sistemu i sabrati sve koeficijente potencija: 2^0, 2^1, 2^2, 2^3, ... Zatim će svaki put, kad bude uzimao drvca iz neke hrpe, uzeti onoliko drvaca da znamenke u zbiru brojeva izraženih u binarnom sistemu budu parni brojevi.

Dakako da će B tokom igre poremetiti taj poredaj ali A će zato uvijek nastojati da ostvari situaciju koja će dati za sumu takav broj čije su znamenke parni brojevi. Postoji međutim jedan izuzetak koga A mora uvijek izbjeći da ne bi pomašio u igri, a taj je: A ne smije nikad dopustiti da dođe do takve situacije gdje bi ostao paran broj hrpa pri čemu svaka hrpa ima samo jedno drvce. Da bi ovo kratko objašnjenje što bolje razumjeli i približili ga našim čitaocima, promatrajmo jednu partiju u cjelosti. Uzmimo da imamo 5 hrpa i neka je broj drvaca u pojedinoj hrpi kako slijedi:

1-a hrpa	7 drvaca	dakle	111
2-a hrpa	5 drvaca	dakle	101
3-a hrpa	4 drvca	dakle	100
4-a hrpa	2 drvca	dakle	10
5-a hrpa	1 drvce	dakle	1
		Ukupno	323

Desno je izražen broj drvaca svake hrpe u binarnom brojnom sistemu. Zatim smo sabrali te brojeve i dobili broj 323 čije su dvije znamenke neparni brojevi.

Sada počinje igra i A počinje prvi igrati. Da bi dobio za sumu broj u kome su sve znamenke parni brojevi on će uzeti čitavu drugu hrpu. Time dobijamo slijedeću situaciju:

||||||| |||| || |

dakle 4 hrpe a suma brojeva u binarnom sistemu iznosi: $111 + 100 + 10 + 1 = 222$.

Imamo dakle same parne brojeve. A sada sigurno dobija. Pretpostavimo da B koga je sada red da igra uzme tri drvca iz druge (bivše treće) hrpe. Imamo sada ovu situaciju:

||||||| | || |

a suma brojeva u binarnom sistemu iznosi: $111 + 1 + 10 + 1 = 123$.

A će, da bi dobio za sumu broj čije su znamenke parni brojevi, uzeti pet drvaca iz prve hrpe. Time imamo slijedeću situaciju:

|| | || |

a suma brojeva u binarnom sistemu iznosi: $10 + 1 + 10 + 1 = 22$.

Doista sve znamenke zbira su parni brojevi.

Predpostavimo opet da B koga je red da igra uzme čitavu prvu hrpu. Time dobijemo slijedeću situaciju:

| || | t. j. tri hrpe a suma znamenaka iznosi $1 + 10 + 1 = 12$.

Sad dolazi na red A. Kad bi on slijepo primjenjivao dato objašnjenje on bi uzeo čitavu drugu (bivšu četvrtu) hrpu i naravno doveo sebe u izgubljeni položaj. Međutim, vodeći računa o spomenutoj napomeni u toku objašnjenja A će uzeti samo jedno drvce i time dobije igru. Ustvari imamo sada slijedeću situaciju:

Ako sada B uzme jedno drvce iz bilo koje hrpe, A uzima jedno drvce i B uzima zadnje drvce čime gubi partiju prema uslovu istaknutom na početku igre a koje glasi: Ko zadnji uzima, gubi!

Sa malo vježbe bit ćemo uvijek u stanju izbjeći slučaj koji ne daje dobitak jer se on pojavljuje pri koncu igre kada je situacija jasna i veoma prosta.

Da napomenemo na koncu izlaganja slijedeće: Da bi igra bila uspješna, moramo dobro uvježbati pretvaranje brojeva našega dekadnog sistema u binarni sistem. Vrijeme utrošeno na uvježbavanje pretvaranja nije uzalud utrošeno jer kako vidimo upoznaje nas pobliže sa binarnim brojnim sistemom.

Potresi i njihovo značenje u nauci i praksi

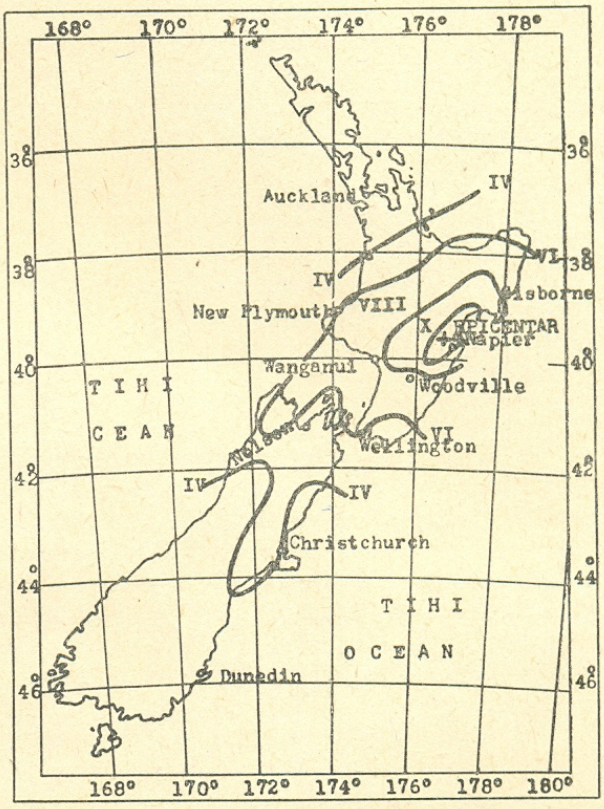
Dr. MARIJAN KASUMOVIĆ, Zagreb

Jedna od najneugodnijih prirodnih pojava za čovjeka je potres, bilo da se on očituje u laganom ljuljanju tla, kojom prilikom čovjek osjeti, da mu prestaje stabilnost uporišta, bilo u snažnim trzajima zemljine kore, koji mogu razoriti gotovo sve ljudske tvorevine u određenom području. Jaki potresi u gusto naseljenim krajevima uzrokovali su najveće prirodne katastrofe, koje poznajemo. U njima je poginulo na tisuće ljudi, a od nekih su potresa bili potpuno uništeni mnogi veliki gradovi.

Potresi nastaju u unutrašnjosti Zemlje. Od ishodišta potresa — h i p o c e n t r a — šire se na sve strane kroz cijelu Zemlju elastični valovi. Ako je potres dovoljno jak, tada se može s vrlo osjetljivim instrumentima utvrditi te valove na površini

cijele Zemlje. Instrumenti, koji za to služe, zovu se seizmografi. Tako se na pr. iz podataka seizmografa utvrdilo, da su amplitude oscilacija tla od nekih potresa u Japanu iznosile u srednjoj Evropi (daljina oko 9000 km) i do 2 cm.

Time nas pojava potresa vodi na mnoga istraživanja, kojima je cilj u prvom redu, da smanjimo posljedice njegovog razornog djelovanja do kojeg dolazi u epicentru (točka na površini Zemlje iznad hipocentra) i njegovoj bližoj okolici, a zatim da se koristimo valovima potresa za upoznavanje unutrašnjosti naše Zemlje, u koju ne možemo direktno doprijeti. Za rješenje prvog zadatka potrebno je utvrditi područja u kojima dolazi do snažnih potresa, odrediti položaje epicentara, ispitati uzroke i prirodu potresa u dotičnom području, broj potresa u pojedinim vremenskim razmacima, a naročito njihovu jačinu. O svim tim faktorima treba da vode računa graditelji pri planiranju i izgradnji zgrada, objekata i čitavih gradova, kako bi bili sigurni od potresa. Za dobivanje podataka o širenju valova potresa kroz Zemlju, potrebno je raspolagati sa većim brojem vrlo osjetljivih seizmografa, koji su raspoređeni po cijeloj Zemlji na seizmičkim stanicama.



Sl. 1.

Svim naprijed spomenutim istraživanjima bavi se seizmologija, nauka o potresima. Ona izgrađuje posebne metode za ispitivanje potresa. Danas postoje dvije metode i to: makroseizmička i mikroseizmička.

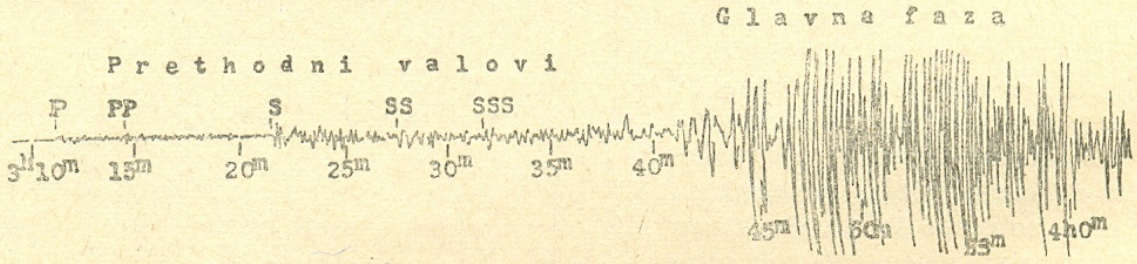
Makroseizmička metoda koristi se opisom te pojave od strane stanovništva potresnog područja (okolica epicentra), koje je potres doživjelo i preživjelo, kao i učincima potresa, koji iza njega trajno ostaju. Na osnovu toga dobivaju se podaci o vremenu nastupa potresa na pojedinim mjestima i o njegovoj jačini. To su glavni podaci na osnovu kojih se vrše analize potresa tom metodom.

Jačina potresa u makroseizmici izrazuje se brojem po Mercalli-Siebergovoj skali. Ona ima 12 stupnjeva. Na pr. na mjestu, gdje su se na kućama rušili dimnjaci, potres je bio jačine VI, što je već jaki potres; jačine VIII je razoran potres, kod kojeg se već ruše pojedine kuće; potres, koji uzrokuje teško oštećenje oko $^3/_4$ zgrada i stvara šire pukotine u tlu uništavajući i ima jačinu X; katastrofalan potres je jačine XI, on ruši sve zgrade i stvara široke pukotine u tlu.

Poznavajući raspodjelu jačine potresa prema Mercalli-Siebergovoj skali, možemo odrediti epicentar potresa s makroseizmičkim podacima na slijedeći način: jačine potresa na pojedinim mjestima unesu se u geografsku kartu i mjesta iste jačine spoje linijama. Te linije jednake jačine potresa zovu se isoseiste. One nam pokazuju prostornu raspodjelu jačine potresa. Budući da jačina potresa opada s dalji-

nom od epicentra, nalazit će se on u onom području, koje omeđuje isoseista najveće jačine potresa. Sl. 1 prikazuje isoseiste jednog potresa na Novom Zelandu i epicentar potresa, koji je određen prema tim linijama.

U većim daljinama od epicentra potres se — zbog slabe jačine — ne može više primijetiti ljudskim osjetilima, nego samo sa seizmografima. Odmah ćemo naglasiti, da potres u neposrednoj blizini epicentra traje samo nekoliko minuta, dok u velikoj daljini seizmografi bilježe pomake tla od istog potresa i po nekoliko sati. Potres u hipocentru je jedan kratkotrajan događaj, kojim se pobuđuju čestice Zemlje na osciliranje. Te oscilacije šire se u obliku valova kroz cijelu Zemlju. Postoji nekoliko vrsta tih valova, kojima je i brzina različita. Budući da se oni na svom putu kroz Zemlju i lome i reflektiraju čak i po nekoliko puta, prevaljuju i različite putove, te stižu na jednu seizmičku stanicu u različito vrijeme. Valovi potresa postoje tako dugo, dok se jednom pobuđeno osciliranje čestica Zemlje nije posve umirilo, a za to je potrebno i nekoliko sati.



Sl. 2.

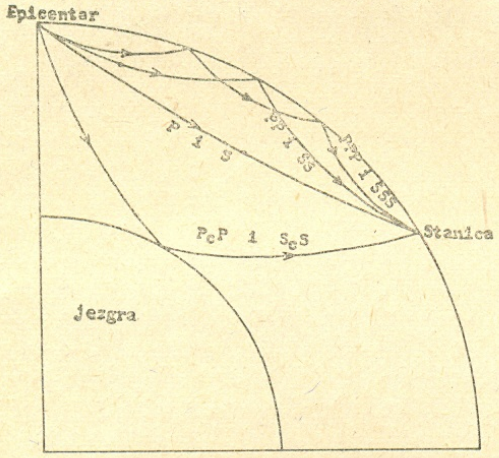
Sl. 2 pokazuje jedan dio registracije potresa na seizmičkoj stanici, koja je udaljena 9000 km od epicentra potresa. Na slici se vide prethodni valovi i glavna faza. Prethodni valovi su oscilacije s razmjerno kratkim periodom (nekoliko sekunda) i malim amplitudama. Naprotiv kod glavne faze amplitude oscilacija su najveće. Uz registraciju na sl. 2 označeno je i vrijeme. Vidimo, da je na dotičnoj stanici potres počeo nešto iza $3^h\ 10^m$. Prethodni valovi stizali su do $3^h\ 40^m$, iza kojeg vremena nastupa glavna faza, u kojoj postoje najveći pomaci tla. Iza toga amplitude se postepeno smanjuju i oscilacije tla potpuno nestaju tek oko $7^h\ 30^m$ (taj dio nije prikazan na slici).

U daljnjem pokazat ćemo značenje samo prethodnih valova. Oni su longitudinalni i transverzalni. Budući da je brzina longitudinalnih valova veća od brzine transverzalnih, to će i longitudinalni stići na stanicu prije nego transverzalni. Slovom *P* označujemo longitudinalne valove, koji su stigli do seizmografa direktnim putom, a sa *PP* odn. *PPP* longitudinalne valove, koji su se jednom odn. dva puta reflektirali od površinskih slojeva Zemlje. Slovom *S* označujemo transverzalne valove, koji su stigli direktno, a sa *SS* odn. *SSS* transverzalne valove koji su se jednom odn. dva puta reflektirali od površinskih slojeva Zemlje. Na sl. 2 označeni su ti valovi naprijed spomenutim simbolima na registraciji potresa. Sl. 3 prikazuje putove tih valova kroz Zemlju a također i put longitudinalnih i transverzalnih valova, koji su se reflektirali od zemljine jezgre (P_cP odn. S_cS).

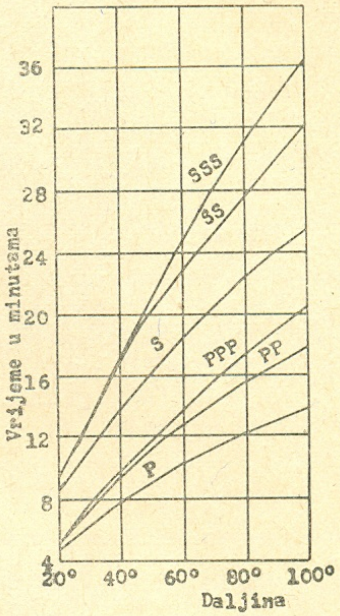
Važno je upozoriti na činjenicu, da svi valovi potresa napuštaju ishodište potresa istodobno, a stižu na stanicu, nakon što su prevalili različite putove s različitim brzinama. Također je jasno, da će vremenski razmaci između dolaska pojedinih valova na jednoj seizmičkoj stanici biti to veći, što je ishodište potresa udaljenije od stanice.

Raspolažemo li na jednoj stanici s podacima o valovima potresa, kojih se epicentri nalaze u različitim udaljenostima od stanice ili s podacima o valovima jednog potresa na stanicama, koje se nalaze u različitim udaljenostima od epicentra, mo-

žemo konstruirati hodohrone pojedinih valova potresa (P, PP, PPP, S itd.). Hodohrone prikazuju zavisnost između udaljenosti epicentra potresa i vremena, koje je bilo potrebno, da pojedini valovi prevale put od epicentra do stanice. One se konstruiraju grafički i to tako, da se na os apscisa nanesu daljine od stanice do epicentra potresa, a na os ordinata vrijeme, koje je proteklo od momenta nastupa potresa u epicentru do dolaska pojedinog vala na dotičnu stanicu. Sl. 4 prikazuje hodohrone naprijed spomenutih valova za potrese iz udaljenosti od 20° do 100° (1° ~ 111 km).



Sl. 3.



Sl. 4.

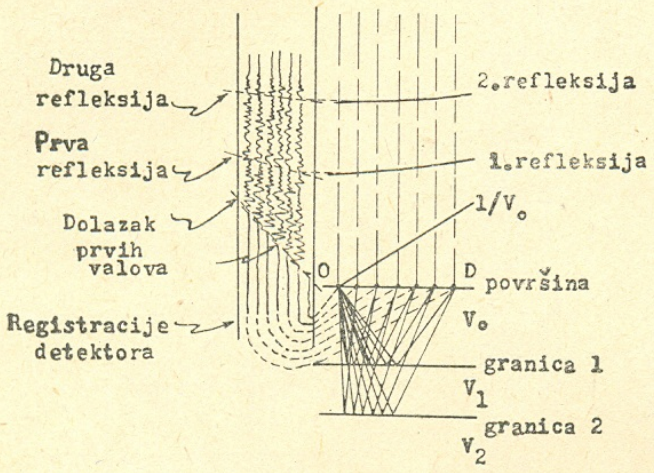
Metoda istraživanja potresa prema podacima seizmografa, a na temelju hodohrona zove se mikroseizmička. Tom metodom možemo također odrediti epicentar potresa, ali još i nešto više. Naime iz svojstava hodohrona, koje smo konstruirali na osnovu podataka registracija seizmografa, možemo izvoditi zaključke o ustrojstvu unutrašnjosti naše Zemlje. Stoga valovi potresa u fizici Zemlje igraju sličnu ulogu kao rentgenske zrake u medicini. Kao što pomoću rentgenskih zraka možemo vidjeti unutrašnjost ljudskog tijela, tako i pomoću valova potresa možemo istražiti unutrašnju strukturu Zemlje.

Takva istraživanja su danas u svom punom razvoju i seizmologija je već dala u tom području važne rezultate. Metode, koje je ona pri tom izgradila, primjenjuju se danas mnogo i u praktične svrhe.

Prikazat ćemo sada, kako se određuje dubina pojedinih slojeva u Zemlji pomoću valova potresa, u primijenjenoj seizmici. To je dio seizmologije, koji koristi valove potresa za istraživanje rudnih ležišta i nafte i zauzima važno mjesto među ostalim područjima primijenjene geofizike. Ona se bavi istraživanjem geološke strukture slojeva, koji se nalaze neposredno ispod površine Zemlje, za potrebe privrede i prakse.

U primijenjenoj seizmici elastični valovi u Zemlji pobuđuju se eksplozijama dinamita u dubini od nekoliko desetaka metara, dakle umjetno izazvanim potresima. U određenim daljinama od točke eksplozije postavi se na površini Zemlje niz malih seizmografa, koji se u primijenjenoj seizmici zovu detektori. Svi detektori povezani su električnim kabelom s mjestom eksplozije tako, da je na dijagramskom

papiru svakog detektora točno označen moment eksplozije. Na sl. 5 u 0 je točka eksplozije (ishodište potresa) a duž površine Zemlje OD razmješteno je u jednom pravcu 6 detektora. Njihove udaljenosti od 0 možemo točno izmjeriti. Od točke eksplozije šire se u Zemlji elastični valovi. Njihova brzina u sloju neposredno ispod površine neka je V_0. U dubini nalazi se jedan sloj, u kojem je brzina tih valova V_1, i kod 1 postoji oštra granica između ta dva sloja. U još većoj dubini nalazi se treći sloj, u kojem je brzina valova V_2, a kod 2 je granica između drugog i trećeg sloja. Slojevi su od različite materije i imaju različita elastična svojstva, pa je stoga i brzina širenja u pojedinim slojevima različita.



Sl. 5.

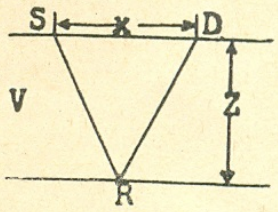
Do detektora prvi će stići oni valovi, koji putuju uz površinu. Do pojedinog detektora oni će stići to kasnije, što je detektor udaljeniji od točke eksplozije. Nanesemo li u sl. 5 iznad svakog detektora vrijeme u kojem su ti valovi stigli do pojedinog detektora, dobit ćemo hodohronu tih početnih valova. Ta hodohrona je pravac. Naime, ako je x daljina pojedinog detektora od točke eksplozije, tada je vrijeme t_0, u kojem su valovi stigli od točke eksplozije do detektora putujući uz površinu brzinom V_0

$$t_0 = \frac{x}{V_0}$$

To je jednadžba pravca, u kojoj je $1/V_0$ koeficijent smjera. Na lijevoj strani sl. 5 prikazani su ti valovi na registraciji svakog detektora.

Na granici između prvog i drugog sloja valova djelomično kroz nju prolaze i lome se, a djelomično se reflektiraju, i vraćaju natrag do detektora. Nas interesiraju samo reflektirani valovi. Nanesemo li vrijeme, koje je bilo potrebno da valovi prevale put do granice 1 i natrag do površine, dobit ćemo hodohronu prve refleksije. Ona je malo svinuta i nije strma, budući da se prevaljeni putovi malo razlikuju. Na lijevoj strani sl. 5 vidimo, da se na registracijama detektora prva refleksija očituje u nešto povećanim amplitudama.

Analogno se događa i na granici 2, tako da možemo odrediti i hodohronu druge refleksije. Ona je gotovo posve položena, jer se prevaljeni putovi sada još manje razlikuju nego u prethodnom slučaju.



Sl. 6.

Na temelju opisane metode refleksije možemo odrediti dubinu granice 1 (granica prvog i drugog sloja) odnosno dubinu granice 2 (granica drugog i trećeg sloja).

Neka je S (sl. 6) točka eksplozije, a D jedan detektor. Daljinu SD označit ćemo s x. U dubini Z je granica sloja i to je veličina koju želimo odrediti. Vrijeme t, u kojem je val prevalio put do granice sloja i natrag brzinom V, jest

$$t = 2\frac{\overline{SR}}{V}$$

Budući da je $\overline{SR} = \sqrt{\left(\frac{x}{2}\right)^2 + Z^2}$, to gornji izraz prelazi u

$$t = \frac{2}{V}\sqrt{\left(\frac{x}{2}\right)^2 + Z^2}$$

Kvadriramo li tu jednadžbu, ona prelazi na oblik

$$V^2t^2 = x^2 + 4Z^2$$

iz kojeg slijedi izraz za dubinu $Z = \frac{1}{2}\sqrt{V^2t^2 - x^2}$

Iz posljednje formule vidimo, da iz poznate daljine detektora x i poznatog vremena t možemo — uz poznavanje brzine V — odrediti dubinu Z, a da pri tome nije bilo potrebno vršiti nikakva bušenja u zemlji.

Prednji račun pokazuje, da je za određivanje dubine dovoljno imati samo jedan detektor. No u praksi se upotrebljava više detektora zbog toga, da se na registracijama može sa sigurnošću utvrditi, koji pomaci tla predstavljaju reflektirane valove. Kad bi postojao samo jedan detektor, bilo bi gotovo nemoguće raspoznati reflektirane valove, zbog mnogo drugih valova i poremećenja, koja se također registriraju. Ako na registraciji svakog detektora u približno isto vrijeme postoje pomaci tla sličnog izgleda, tada su to sigurno refleksije.

Time smo u kratkim crtama prikazali značenje potresa i ulogu seizmologije u općem istraživanju unutrašnjosti naše Zemlje. Seizmologija je mlada nauka, koja se još razvija, jer postoji mnogo problema, koje ona treba riješiti.

O približnom izračunavanju kvadratnog korena

Dr BOŽIDAR ĐERASIMOVIĆ, Beograd

1. U ovom članku biće pokazana jedna nejednakost koja omogućava određivanje približnih vrednosti kvadratnog korena iz datog pozitivnog broja. Osim toga biće pokazan i postupak u kome se pomenuta nejednakost kombinuje sa poznatim algoritmom za izračunavanje kvadratnog korena cifru po cifru.

2. Neka je $a > 1$ i neka je b najveći ceo broj koji se sadrži u $\sqrt{a}$ [1], tj. neka je

$$b < \sqrt{a} < b + 1, \tag{1}$$

gde je $b \geqslant 1$. Tada je $b^2 < a < (b+1)^2$,

pa se može staviti $a = b^2 + r$ (2)

gde je $0 < r < 2b + 1$. (3)

Isto tako, na osnovu nejednakosti (1), može se staviti

$$\sqrt{a} = b + x \tag{4}$$

gde je x nepoznati decimalni deo korena $\sqrt{a}$:

$$0 < x < 1, \tag{5}$$

koji je potrebno odredити.

Poređenjem jednakosti (2) i (4) dobija se

$$(b + x)^2 = b^2 + r,$$

odakle je $$x = \frac{r}{2b + x}. \tag{6}$$

---

1) Ako je $a < 1$, dovoljno je pomnožiti poткорену величину a повољном декадном јединицом 10^{2n}, што ће се на крају рачуна узети у обзир.

Изостављањем позитивне величине x у имениоцу разломка на десној страни последње једнакости тај разломак се повећава па се једнакост (6) претвара у неједнакост

$$x < \frac{r}{2b}. \tag{7}$$

Ако се напротив x у имениоцу разломка у једначини (6) замени величином $\frac{r}{2b}$, за коју је сад утврђено да је већа од x, онда се једнакост (6) претвара у неједнакост

$$x > \frac{r}{2b + \frac{r}{2b}}. \tag{8}$$

Исто тако је

$$x > \frac{r}{2b+1}, \quad \text{јер је } x < 1. \tag{9}$$

Кад се обема странама неједнакости (7) и неједнакости (8) дода b, онда се — с обзиром на једнакост (4) — добија двострука неједнакост

$$b + \frac{r}{2b + \frac{r}{2b}} < \sqrt{a} < b + \frac{r}{2b}. \tag{10}$$

3. Неједнакост (10) даје две приближне вредности корена $\sqrt{a}$: једну већу од праве вредности тога корена, а другу мању од те вредности. Поређењем ових двеју приближних вредности може се оценити колику тачност оне дају.

Нека је например $a = 174 = 13^2 + 5$, па је $b = 13$, $r = 5$, те из неједнакости (10) следује:

$$13 + \frac{130}{681} < \sqrt{174} < 13 + \frac{5}{26}$$

тј.

$$13{,}19089\ldots < \sqrt{174} < 13{,}19230\ldots .$$

Одатле закључујемо да приближна вредност

$$\sqrt{174} \approx 13{,}19$$

има тачна два децимала, тј. да је грешка посматране приближне вредности:

$$\sqrt{174} - 13{,}19 < \frac{1}{2 \cdot 10^2}.$$

Неједнакост (10) не даје увек тако повољан резултат као у наведеном примеру. Добијена тачност зависи од величина r и b и расте кад r опада, а b расте. Заиста из једнакости (6) следује

$$x = \frac{r}{2b} - \frac{x^2}{2b}, \tag{11}$$

па је, према (4), апсолутна вредност грешке која се учини кад се $\sqrt{a}$ замени са $b + \frac{r}{2b}$:

$$\left| \sqrt{a} - \left(b + \frac{r}{2b} \right) \right| = \frac{x^2}{2b}.$$

Одатле је на основу неједнакости (7):

$$\left| \sqrt{a} - \left(b + \frac{r}{2b} \right) \right| < \frac{r^3}{8b^3}.$$

Например за $\sqrt{3}$, где је $b = 1$, $r = 2$, добиће се веома неповољан резултат

$$1{,}66\ldots < \sqrt{3} < 2.$$

4. Из неједнакости (7) и (9) следује једна мање повољна али простија неједнакост за $\sqrt{a}$:

$$b + \frac{r}{2b+1} < \sqrt{a} < b + \frac{r}{2b}. \tag{12}$$

Например за $\sqrt{5}$ добија се из ове неједнакости

$$2{,}2 < \sqrt{5} < 2{,}25.$$

5. Неједнакост (12) је нарочито корисна ако се у примени комбинује са познатим алгоритмом за израчунавање квадратног корена цифру по цифру.

Заиста, ако се у примени поменутог алгоритма заустави после ма колико израчунатих цифара, онда добијени резултат, сматран као цео број, представља b у једначинама (2) и (4). Збир последњег остатка, насталог у примени алгоритма, сматраног као целог броја и неискоришћених класа поткорене величине, сматраних као децимала претставља остатак r у једначини (2).

Например, посматрајмо израчунавање корена:

$$\begin{array}{l} \sqrt{2,|75|83|56} = 1,66 \\ \underline{1} \\ \underline{17|5} \qquad :26\cdot 6 \\ \underline{156} \\ \underline{1983} \qquad :326\cdot 6 \\ \underline{1956} \\ 27 \end{array}$$

У том примеру је: $b = 166$, $r = 27{,}56$.[2)]

Нека је на $\sqrt{a}$ поменути алгоритам примењен m пута. Тада добијени резултат b има m цифара (прва од њих није нула), па је

$$b \geqslant 10^{m-1} \tag{13}$$

Разломак $\frac{r}{2b}$ је, на основу једначине (10), приближна вредност непознатог децималног дела x корена $\sqrt{a}$. При томе је апсолутна вредност учињене грешке

$$\left| x - \frac{r}{2b} \right| = \frac{x^2}{2b}, \text{ те је према (5) и (13):}$$

$$\left| x - \frac{r}{2b} \right| < \frac{1}{2\cdot 10^{m-1}}. \tag{14}$$

Неједнакост (14) казује да се из количника $\frac{r}{2b}$ добија увек још $m-1$ тачних цифара корена $\sqrt{a}$, ако b има m цифара.

Пример 1:

$$\begin{array}{l} \sqrt{1|74} = 13{,}19 \\ \underline{74} \qquad :23\cdot 3 \\ \underline{69} \\ \underline{500} \qquad :261\cdot 1 \\ \underline{261} \\ \underline{2390|0} \qquad :2629\cdot 9 \\ \underline{23661} \\ 239 \end{array}$$

Ако се добијени резултат сматра као цео број $b = 1319$, онда је $r = 239$, па је

$$\begin{array}{l} \frac{r}{2b} = 239 : 2638 = 0{,}09059\ldots \\ \underline{23900} \\ \underline{23742} \\ 15800 \\ \underline{13190} \\ 26100 \\ \underline{23742} \\ 2358 \end{array}$$

[2)] При томе је поткорена величина помножена са 10^4, а добијени резултат са 10^2.

Како је $m = 4$, $m - 1 = 3$, добијени резултат ваља заокруглити на три децимала, па следује

$$\sqrt{174} \approx 13{,}19091$$

са грешком мањом од $\frac{1}{2 \cdot 10^5}$.

Понекад се из количника $\frac{r}{2b}$ добија више од $m - 1$ тачних цифара. Тада је погодно користити неједнакост (12), тј. израчунати и њену леву страну $b + \frac{r}{2b+1}$. У посматраном примеру је

$$\frac{r}{2b+1} = 239 : 2639 = 0{,}09056\ldots$$

$$\begin{array}{r} 23900 \\ 23751 \\ \hline 14900 \\ 13195 \\ \hline 17050 \\ 15834 \\ \hline 1216 \end{array}$$

што значи да је

$$13{,}1909056\ldots < \sqrt{174} < 13{,}1909059\ldots, \quad \text{па је}$$

$$\sqrt{174} \approx 13{,}190906$$

са грешком мањом од $\frac{1}{2 \cdot 10^6}$.

Пример 2. Израчунати $\sqrt{7}$ са девет тачних цифара.

Првих пет цифара одредиће се применом познатог алгоритма а последње четири добиће се из следећег количника $\frac{r}{2b}$.

$$\sqrt{7} = 2{,}6457$$

$$\begin{array}{r} 300 \\ 276 \\ \hline 2400 \\ 2096 \\ \hline 30400 \\ 26425 \\ \hline 397500 \\ 370349 \\ \hline 27151 \end{array} \begin{array}{l} :46 \cdot 6 \\ \\ :524 \cdot 4 \\ \\ :5285 \cdot 5 \\ \\ :52907 \cdot 7 \\ \\ :52914 = 0{,}51311 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 271510 \\ 264570 \\ \hline 69400 \\ 52914 \\ \hline 164860 \\ 158742 \\ \hline 61180 \\ 52914 \\ \hline 82660 \end{array}$$

(Пета цифра количника $\frac{r}{2b}$ израчуната је због заокругљавања).

Према томе је

$$\sqrt{7} \approx 2{,}64575131$$

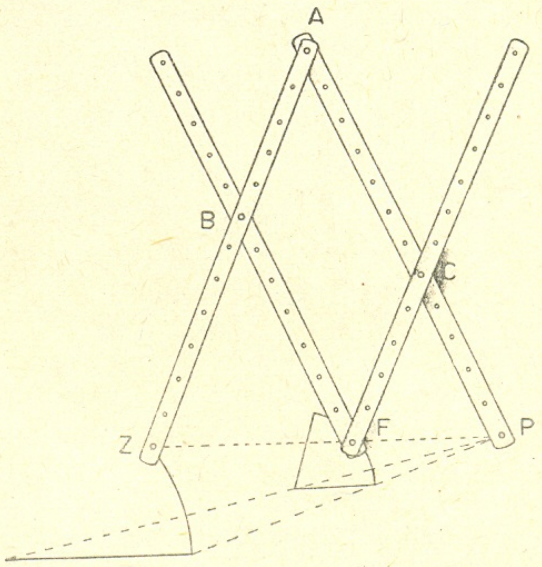
са грешком мањом од $\frac{1}{2 \cdot 10^8}$.

О пантографу

РАДЕ БОШКОВИЋ, Титоград

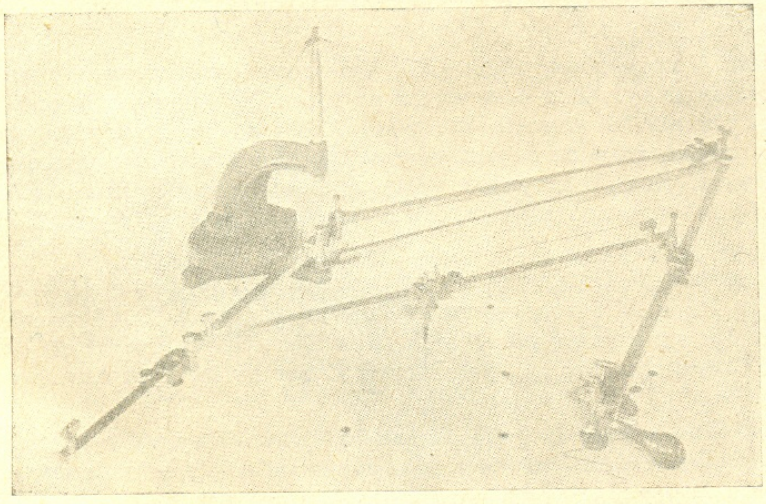
Постоји више начина за смањивање или увећавање планова (карата, геометриских слика итд.): помоћу мреже квадрата, редукционим шестаром, фотографским путем. Оно може да се изврши и механички помоћу нарочите справе, коју је пронашао Кристоф Шајнер (Christoph Scheiner) 1603 год., а зове се пантограф.

Пантограф је математички инструменат, који се састоји од четири шипке, међусобно гибљиво спојене у водораван паралелограм.



Сл. 1

Једноставнијим пантографима шипке су дрвене. Једна врста једноставнијих пантографа скицирана је на сл. 1. Шипке се могу окретати око тачака A, B, C и F. Постоје једнакости: $ZB = BF = AC$, $CP = CF = AB$. Какогод растегнемо или стиснемо пантограф, увијек ће три тачке P, F, Z лежати на једној правој. Инструменат се у тачки P (која се зове пол) причврсти на папир, у тачки F се намјести игла, а у тачки Z писалка. Ако се тачка F гиба по контури неке фигуре, тачка Z ће једновремено описивати контуру повећане, перспективно сличне фигуре. Ово следује из $PF : PZ = PC : PA = AB : AZ$. Будући да су посљедње двије размјере сталне, то је и прва размјера стална. Замијенимо ли међусобно иглу и писаљку, добивамо умањену фигуру. Однос увећавања или умањивања (коефицијент сличности) означен је код рупица и може се мијењати.



Сл. 2

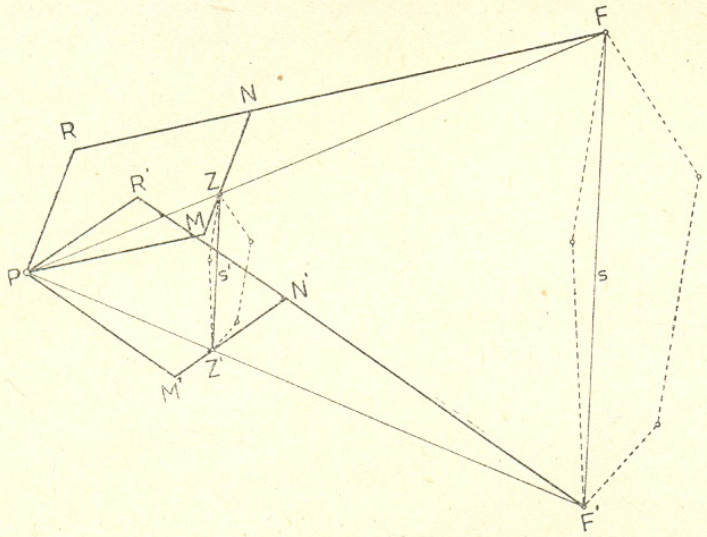
Прецизнијим пантографима шипке су од ковине са милиметарском подјелом и нонијусом уз назначени однос умањивања или увећавања. Такав један пантограф приказан је на сл. 2. Објаснимо га поближе.

Замислимо један паралелограм $PMNR$ (сл. 3). На продужењу стране RN узмемо произвољну тачку F. Паралелограм с том продуженом страном може се окретати око утврђене тачке P (тјемена, пола) тако да све дужи остају једнаке, док се углови могу мијењати.

Претпоставимо да тачка F опише било какву дуж FF'. $PM'N'R'$ је нови положај паралелограма. Нека је Z пресјечна тачка праве PF и MN. Z' је пресјечна тачка праве PF' и $M'N'$. Треба показати да је Z' нови положај тачке Z, која је у односу на дуж MN остала чврста.

Из $\triangle PMZ \sim \triangle NFZ$ излази $PM : NF = MZ : NZ$,
из $\triangle PM'Z' \sim \triangle N'F'Z'$ излази $PM' : N'F' = M'Z' : N'Z'$.

Будући да је $PM = PM'$, $NF = N'F'$ излази да су десне двије размјере једнаке, тј. тачка Z дијели дуж MN у једнаком односу као тачка Z' дуж $M'N'$. Но због $MN = M'N'$ је $MZ = M'Z'$, $NZ = N'Z'$, дакле кад се F помакне у F', тачка Z се помакне у Z' не мијењајући свој релативни положај на дужи MN ($M'N'$). Из наведених сличности троуглова следује даље:



Сл. 3

$$\frac{ZF}{PZ} = \frac{NF}{RN} \text{ као и } \frac{Z'F'}{PZ'} = \frac{N'F'}{R'N'}$$

Додавањем $+1$ лијевим и десним странама добијамо

$$\frac{ZF}{PZ} + 1 = \frac{NF}{RN} + 1 \quad \text{и}$$

$$\frac{Z'F'}{PZ'} + 1 = \frac{N'F'}{R'N'} + 1$$

$$\frac{PZ + ZF}{PZ} = \frac{RN + NF}{RN} \quad \text{и}$$

$$\frac{PZ' + Z'F'}{PZ'} = \frac{R'N' + N'F'}{R'N'} \quad \text{дакле} \quad \frac{PF}{PZ} = \frac{RF}{RN} \quad \text{и} \quad \frac{PF'}{PZ'} = \frac{R'F'}{R'N'}$$

С обзиром да је $RF = R'F'$ и $RN = R'N'$ добијамо

$$\frac{PF}{PZ} = \frac{PF'}{PZ'} = \frac{RF}{RN} = k \text{ (коеф. сличности).}$$

Такође су и троуглови PFF', PZZ' слични па је $FF' \parallel ZZ'$, $\frac{FF'}{ZZ'} = k$.

Претпоставимо да у тачки F продужене шипке RN учврстимо (намјестимо) једну иглу а у Z заоштрену оловку, писаљку. Када игла клизи по дужи FF' односно обилази по контури неке дате слике, оловка ће клизити по дужи ZZ' односно обилазити по контури сличне слике са датим коефицијентом сличности. Ако би хтјели промијенити коефицијент или однос сличности онда је потребно тачку F помјерити по правој RN на једну или другу страну, а истовремено премјестити и оловку Z тако да су P, Z, F на истој правој.

Почетак је подјеле на шипки PM у тачки P, на пречки MN у тачки M и на пречки RF у тачки R. Пречке RF и MN по дужини су једнаке (види сл. 2). Ако желимо план умањити у односу $1/n$ намјестимо тачке M и N на $1/n$ дужине пречке RF и тачку Z на $1/n$ дужине MN. Сваки пут што га црта оловка Z бит ће $1/n$ пута описаног иглом F. (На сл. 3 је $n = 3$).

За једновремени почетак или свршетак рада спојени су међусобно игла и оловка узицом тако да се дизањем или спуштањем игле истовремено диже или спушта оловка.

Ако уведемо ознаке $FF' = s$, $ZZ' = s'$, $RF = l$ (дужина штапа), $RN = x$ (растојање између штапова) онда је

$$s : s' = l : x, \text{ одакле је } x = \frac{s'}{s} l.$$

Мјесто пријеђеног пута обилазне игле и писаљке који су означени са s и s' можемо уписати размјеру плана који смањујемо и размјеру у коју желимо извршити смањивање.

Примјер: План размјере 1 : 500 потребно је смањити на размјеру 1 : 750. Прво треба да знамо дужине штапова. Оне обично износе 840 *mm*. Растојање између штапова ће бити

$$x = \frac{s'}{s} l = \frac{\frac{1}{750}}{\frac{1}{500}} \cdot 840 = 560, \text{ тј. } x = 560 \; mm.$$

Према томе нонијусе на пречкама требамо наравнати на 560 *mm*.

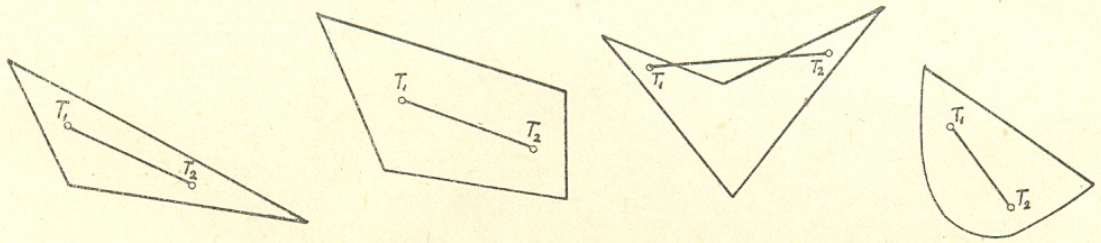
Пантограф се може употребљавати и тако да се пол налази у средини планова. У том случају растојање између штапова (пречки) одређујемо по формули $x = \frac{M}{m + M} \cdot l$ где M означава размјеру нашега плана, а m размјеру плана који желимо добити.

Konveksne figure

KREŠO HORVATIĆ, Zagreb

I.

Dio ravnine obuhvaćen jednom zatvorenom linijom (izlomljenom crtom ili krivuljom) zvat ćemo geometrijskim likom ili figurom.[1] Reći ćemo, da je neka figura konveksna, ako iz činjenice da točke T_1 i T_2 pripadaju figuri slijedi, da i cijela dužina $\overline{T_1T_2}$ pripada figuri. Drugim riječima to znači, da kod konveksne figure najkraći put od svake njezine točke do svake druge njezine točke vodi kroz samu figuru.[2] To dakako općenito, kod svake figure ne mora biti ispunjeno. Na primjer svaki je trokut konveksna figura. Četverokuta već ima konveksnih, ali i takovih koji



Sl. 1.

nisu konveksni. Općenito mnogokut, koji nije trokut može, ali ne mora biti konveksan. Krug, polukrug, elipsa, dio parabole omeđen jednom njezinom tetivom su konveksne figure (Sl. 1).

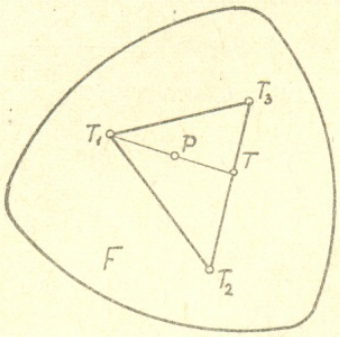
Ako su T_1, T_2 i T_3 tri točke neke konveksne figure F, koje ne leže na istom pravcu, onda čitav trokut $T_1T_2T_3$ pripada toj figuri F. Kako je naime figura F konveksna, to zajedno s točkama T_1, T_2, T_3 ta figura sadrži i njihove pravocrtne spojnice, dakle stranice trokuta $T_1T_2T_3$. Ako je sada P bilo koja točka unutar tog trokuta, pravac T_1P će sijeći stranicu T_2T_3 u nekoj točki T. Budući da točke T_1 i T pripadaju figuri F, pripadat će joj i cijeli segment $\overline{T_1T}$, dakle i točka P, što smo htjeli dokazati. Trokut $T_1T_2T_3$ je najmanja konveksna figura, koja sadrži točke T_1, T_2 i T_3[2] (Sl. 2).

---

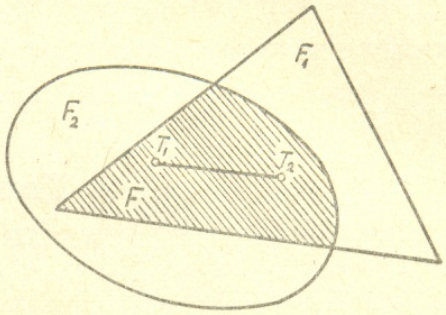
[1] Figura se strogo definira kao skup točaka euklidske ravnine, koji je omeđen, zatvoren i suvisao. (Nazivi kao u knjizi Đ. Kurepa: Teorija skupova, Zagreb, 1951).

[2] Konveksnu figuru možemo definirati i na razne druge načine. Na primjer, figura je konveksna, ako svaka točka ravnine, koja ne pripada figuri ima samo jednu projekciju na figuru. Pritom pod projekcijom točke na figuru razumijevamo one točke figure, koje imaju minimalnu udaljenost od dane točke (Motzkin). Ili: figura je konveksna, ako za bilo koju raspodjelu pozitivne mase težište pripada figuri (Weyl).

Zamislimo, da se dvije konveksne figure F_1 i F_2 djelomično prekrivaju (sl. 3). Zajednički dio tih dviju figura je opet konveksna figura F. Ako su naime T_1 i T_2 bilo koje dvije točke zajedničkog dijela F, onda te točke moraju pripadati i figuri F_1 i figuri F_2. Budući da su te figure konveksne, to i spojnica $\overline{T_1T_2}$ mora pripadati kako jednoj, tako i drugoj figuri, dakle i njihovom zajedničkom dijelu F, pa je figura F konveksna. Analogno bi se pokazalo, da je zajednički dio od više konveksnih figura opet konveksna figura.

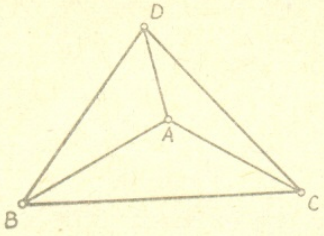


Sl 2.

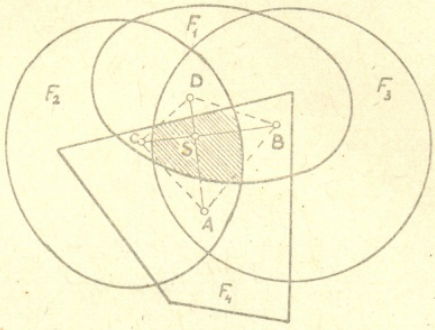


Sl. 3.

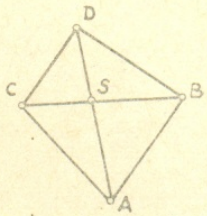
Ako imamo u ravnini skup konveksnih figura sa svojstvom, da svake tri figure iz skupa imaju zajedničku točku, onda sve figure skupa imaju zajedničku točku (Helly, 1923). Dokazat ćemo taj stavak u najjednostavnijem slučaju, kad je broj promatranih figura četiri (sl. 4). Neka su dakle F_1, F_2, F_3 i F_4 konveksne figure, pa neka figure F_2, F_3 i F_4 imaju zajedničku točku A, figure F_3, F_4 i F_1 zajedničku točku B, figure F_4, F_1 i F_2 zajedničku točku C i napokon F_1, F_2 i F_3 zajedničku točku D. Figuri F_1 pripadaju točke B, C i D, dakle i cijeli trokut BCD, kako smo to ranije



Sl. 5.



Sl. 4.



Sl. 6.

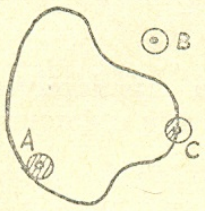
dokazali. Analogno figuri F_2 pripada cijeli trokut CDA, figuri F_3 trokut DAB, a figuri F_4 trokut ABC. Svaki od ova četiri trokuta ima sa svakim drugim po jednu stranicu zajedničku. Ako jedna od točaka A, B, C, D padne unutar trokuta, određenog sa preostale tri točke, onda je ta točka zajednička za sva četiri trokuta, a time i za sve četiri figure (Sl. 5). Ako pak to nije slučaj, onda je četverokut konveksan, pa je sjecište S njegovih dijagonala zajednička točka svih trokuta, prema tome i svih zadanih figura (Sl. 6).

II.

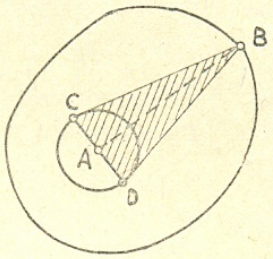
Točke ravnine možemo obzirom na neku figuru, koja u toj ravnini leži, podijeliti u tri kategorije. Unutrašnja je točka figure ona točka ravnine, oko koje se kao središta može opisati krug, koji sadrži samo točke figure. Vanjska je točka obzirom

na figuru takova točka ravnine, oko koje se može opisati krug, koji ne sadrži točke figure. I napokon, rubna je točka figure karakterizirana svojstvom, da svaki krug, kojem je ona središte sadrži i točke figure i točke, koje figuri ne pripadaju. Na sl. 7 je na primjer A unutarnja točka, B vanjska točka, a C rubna točka figure. Sve unutarnje točke figure čine nutrinu figure, sve vanjske točke obzirom na figuru čine vanjštinu figure, dok sve rubne točke figure čine njezin rub ili konturu.

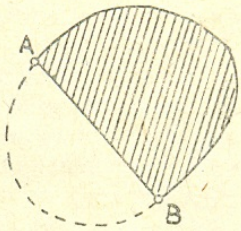
Ako je neka figura F konveksna, onda se segment, koji spaja jednu njezinu unutarnju točku A sa rubnom točkom B sastoji iz samih unutarnjih točaka figure. Budući da je A unutarnja točka figure, to oko nje postoji krug, koji čitav pripada figuri F. Neka je $\overline{CD}$ dijametar toga kruga, okomit na segment $\overline{AB}$. Kako točke B,



Sl. 7.



Sl. 8.



Sl. 9.

C i D pripadaju figuri, cijeli trokut BCD pripada figuri (Sl. 8). Međutim svaka točka visine $\overline{AB}$ tog trokuta, izuzev krajnje točke A i B, je unutrašnja točka trokuta, a time pogotovo unutarnja točka figure F, kako smo i tvrdili. Odavde neposredno slijedi, da svaki pravac, koji prolazi unutrašnjom točkom konvesne figure, siječe rub te figure uvijek u dvije točke.

Rub konveksne figure nazivamo još zatvorena konveksna krivulja. Luk takove krivulje zovemo konveksnim lukom. Svaki se konveksni luk $\overset{\frown}{AB}$ dade segmentom nadopuniti na zatvorenu konveksnu krivulju (Sl. 9). Dosta je očigledno, da zatvorena konveksna krivulja uvijek dijeli ravninu u dva područja: nutrinu figure, kojoj je rub, i njezinu vanjštinu. Zatvorene krivulje, koje imaju to svojstvo zovu se zatvorene Jordanove krivulje. Svaka zatvorena konveksna krivulja je dakle jedna Jordanova krivulja.

(Svršit će se)

ZANIMLJIVOSTI I RAZNO

Такмичење из физике за ученике средњих школа у НР Македонији

У НР Македонији било је у јуну ове године одржано друго од такмичења из физике за ученике средњих школа, које сваке друге године, на смену са такмичењем из математике, организује Друштво математичара и физичара НР Македоније. Такмичење је било појединачно, по разредима, а задаци су били следећи:

VI клас

1. Една елестична топка паѓа од височината $h = 78{,}48\ m$ на една хоризонтална елестична рамнина, од која што се одбива со брзината која е 3/4 од брзината со која што удрива во неа. Каква височина ке достигне топката после одбивањето и колку време ке измине од почетокот на движењето до вториот удар во рамнината?

2. Еден прстен од легура на злато и бакар тежи 500 g. Потопен во вода (спец. теж. 1.), овој прстен тежи 450 g. Колку злато и колку бакар има во прстенот, ако специфичната тежина на златото е 19,3 g/cm^3, а на бакарот 8,9 g/cm^3?

3. Едно тело со тежина 5 kg е врзано за конец долг 1 m и се врти по вертикален круг, правејќи во една минута 40 завртувања. Да се одреди: *а)* колкава е силата што го затегнува конецот кога телото

е во највисоката точка? *б*) Колкава е оваа сила кога телото е во најниската точка? *в*) Колкав треба да биде бројот на завртувањата во минута за да не падне телото кога е во највисоката точка?

4. Демонстрирање: хидростатичен парадокс и слагање на сили.

VII клас

1. Колкава е температурата на водата што настанала со мешање на 40 *g* лед при температура од $-8°\,C$ и 120 *g* вода при температура од $50°\,C$; специфична топлина на ледот е $c = 0{,}5$ *cal/g* степен, а топлината на топење е 80 *cal/g*

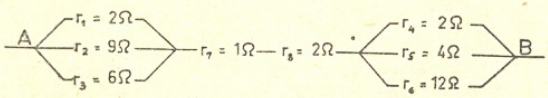
2. Светлосен зрак паѓа на стаклена призма од крон стакло под агол 22°. Под каков агол зракот излегува од призмата, ако аголот на прекршевањето на призмата е 41°? Под каков агол ќе се отколони зракот од првобитниот правец, поминувајќи низ призмата?

3. Во двојното фокусно растојание на леката L_1 се навоѓа светлосен предмет A, кој дава лик B ($B = A$). Ликот B служи како предмет на една друга леќа L_2 со фокусно растојание $f_2 = 50$ *cm*. На кое растојание треба да се постави леќата L_2 од ликот B, па да се добие ликот C, кој ќе има два пати пони голема големина од предметот A?

4. Демонстрирање: добивање на ликови помоќу леќа и ширење на телата при загребање.

VIII клас

1. Еден проводник има форма, покажана на сл. 1. Да се одреди отпорот на овој сложен проводник и јачината на струјата во сите поодделни гранки на овој проводник, ако разликата на потенцијалите на краевите A и B на проводникот е 26 волта?



2. Две еднаки платински топчиња, со тежина 0,01 *g* секоја од нив, висат на еден свилен конец со должина од 50 *cm* така, да се допират. Откако топчињата биле подеднакво наелектризирани, тие се отклониле една од друга толку да нивната централна оддалеченост изнесува 7 *cm*. Да се определи количество на електричество на секое топче.

3. Од никелинска жица со попречен пресек 0,08 mm^2 треба да се направи грејач, кој при јачина на струја од 5 *A* за 12,5 минути би загреал 1,5 литра вода од $16°\,C$ на $100°\,C$. Загубите на топлината да се занемарат. Колку треба да изнесува должината на жицата за таа цел?

4. Демонстрација: проводливост на течностите и распоред на електричество по површината на проводниците.

После такмичења биле су додељене три награде оним учесницима, који су показали најбоље резултате.

Доставио: *П. Димић*

Такмичење ученика трстеничке гимназије у математици и физици

Математичко-физичка група при Вишој мешовитој гимназији у Трстенику, коју предводи професор Стојадин Величковић, организовала је почетком маја ове године наградно такмичење у математици и физици. На такмичењу је учествовало 30 ученика. Знатно веће интересовање показали су ученици за математику (21) а мање за физику (9).

Такмичење у математици, које је одржано осмог маја, састојало се у томе, што су ученици у току 3 часа писмено решавали 10 задатака у оквиру програма свог разреда.

У оквиру такмичења у физици, месец дана пре почетка такмичења објављене су наградне теме. Теме су биле:

1. Допринос Николе Тесле у електротехници.
2. Основи атомске физике.
3. Коришћење атомске енергије.
4. Природне силе у служби човека.
5. Класична и атомска физика.
6. Физика и техника.

Такмичење у физици је одржано деветог маја. На њему су ученици за 3 часа обрађивали писмено ону тему за коју су се највише заинтересовали.

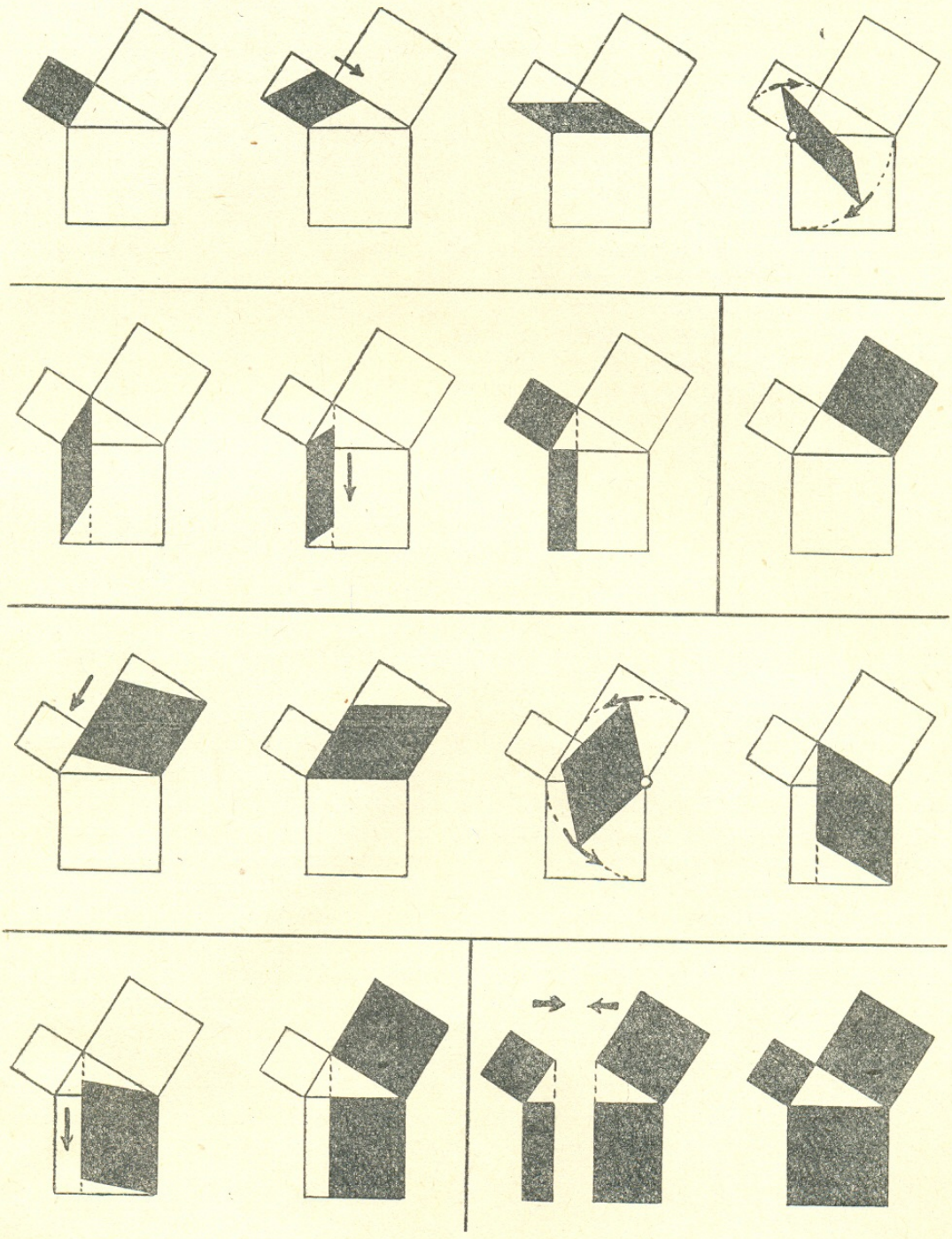
Радови са оба дела такмичења предавани су под шифрама.

Прву награду на такмичењу у математици добио је Атанасковић Мирољуб, уч. VIII_2 разр. гимназије, а из физике Анђић Александар, ученик VII_1 разреда гимназије.

Најбољи успех на такмичењу показали су ученици VIII разреда.

Васковарџић Р. Станко
уч. 8_1 раз. гимн. Трстеник

Pitagorin poučak u stripu



Riječima poprati sam!

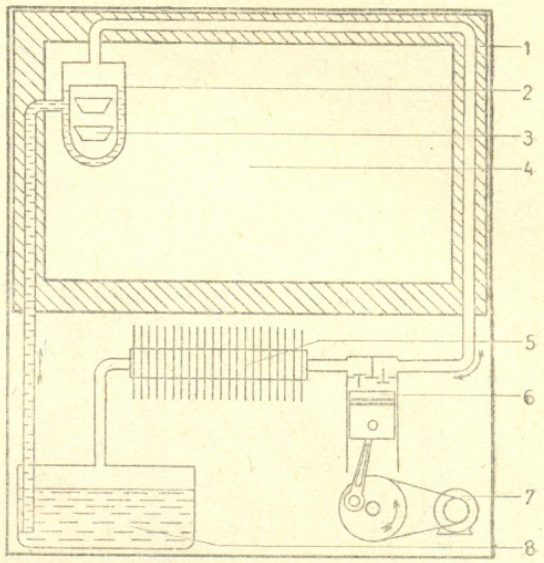
Milan Krajnović, Zagreb

Električni hladnjaci

Iz nauke o toplini je poznato, da je isparavanje tekućina takav proces, koji zahtijeva stalno dovođenje topline. Neku tekućinu možemo ugrijati samo do njezinog vrelišta. Daljnje dovođenje topline ne povisuje joj temperaturu, već se sva toplina troši na stvaranje pare. Veličina, koja karakterizira tu pojavu zove se toplina isparavanja. Ona se definira kao količina topline u kalorijama, koja je potrebna, da se jedan gram neke tekućine bez povišenja temperature pretvori u paru. Tako je na pr. toplina isparavanja vode 539 cal g^{-1}. Zbiva li se obrnut proces, t. j. kad masa od jednog grama pare kondenzira u tekućinu, vraća se okolini ista količina topline. Ona se tada zove toplina kondenzacije. Ako tekućina isparava unutar zatvorenog, od okoline toplinski izoliranog prostora, oduzimat će se tom prostoru toplina i njegova će temperatura padati. Pretvorimo li nastale pare posebnim postupkom natrag u tekućinu i omogućimo li joj ponovo isparavanje unutar istog prostora, učinili smo jedan kružni toplinski proces, kojim smo tom prostoru oduzeli izvjesnu količinu topline i snizili mu temperaturu. Takovi kružni toplinski procesi zbivaju se u svim električnim hladnjacima. Upotrebljena tekućina zove se tada rashladno sredstvo, a biraju se tekućine što nižeg vrelišta i što veće topline isparavanja (Amonijak: —33,5° C, 297 cal g^{-1}).

Postoje uglavnom dvije vrste hladnjaka: kompresorski i apsorpcioni.

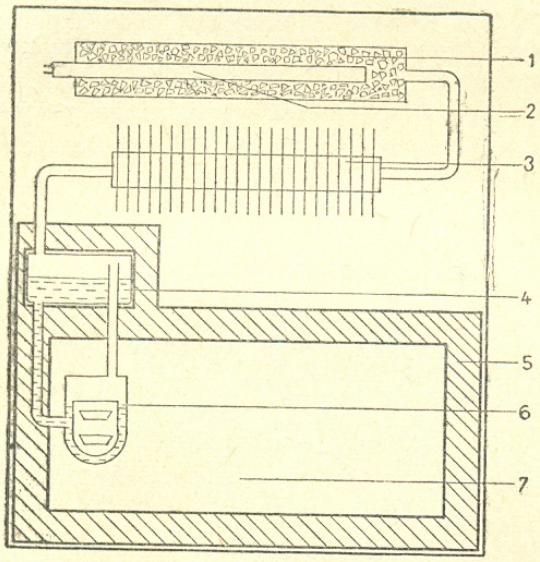
Kako mu i ime kaže, prvi tip hladnjaka radi pomoću jednog kompresora pokretanog električnim motorom. Kompresor potiskuje tekući amonijak iz spremnika u isparivač. Isparivač je sistem cijevi velike površine, zbog čega je toplinski kontakt sa zrakom u unutrašnjosti hladnjaka velik. Tekući amonijak naglo isparava i oduzima okolini velike količine topline. Budući da je unutrašnjost hladnjaka debelim slojem pluta toplinski izolirana prema vani, temperatura u hladnjaku će pasti. No istovremeno kompresor crpi nastale pare amonijaka iz isparivača i potiskuje ih u kondenzator. Time u isparivaču nastaje niži pritisak, što još više pospješuje isparavanje amonijaka. Kondenzator je također sistem cijevi s velikom površinom, pa pare amonijaka ubrzo poprimaju sobnu temperaturu. Kad kompresor postigne u kondenzatoru tlak od 6,5 atmosfera plinoviti amonijak se ponovo kondenzira, a nastala tekućina teče u spremnik. Isparavanje i kondenziranje zbiva se tako dugo, dok se ne postigne dovoljno niska temperatura. Poseban automatski uređaj iskopčava tada struju u motoru, kompresor prestaje raditi i proces se prekida. Zbog nesavršenosti toplinske izolacije temperatura će u hladnjaku ponovo rasti. No ako naraste iznad one, koju smo odabrali, isti automatski uređaj stavlja kompresor ponovo u pogon, tako da temperatura u hladnjaku ostaje praktički uvijek konstantna.



1-pluto 2-Isparivač 3-posude za led 4-unutrašnjost hladnjaka 5-kondenzator 6-kompresor 7-elektromotor 8-spremnik

Apsorpcioni hladnjaci znatno su jednostavniji. Oni nemaju nikakove pokretne dijelove, jeftiniji su i manje podložni kvaru. Njihov je nedostatak jedino u tome, što ne mogu postići tako velike razlike u temperaturama kao kompresorski hladnjaci. Ipak za krajeve s umjerenom

klimom sasvim dobro služe svojoj svrsi. Rad jednog apsorpcionog hladnjaka možemo podijeliti u dva radna perioda. U prvom tekući amonijak isparava u isparivaču iste konstrukcije kao i kod kompresorskog hladnjaka. Kod toga se unutrašnjosti hladnjaka oduzima toplina. Nastale pare ne odstranjuje sada kompresor, već ih apsorbira posebno apsorpciono sredstvo u t. zv. apsorberu. Apsorpcijom se stvara niži pritisak, što i



1-absorber 2-grijač 3-kondenzator 4-spremnik
5-pluto 6-isparivač 7-unutrašnjost hladnjaka

opet pospješuje isparavanje amonijaka. Prvi takt svršava u momentu kad se ispari sva tekućina, što može trajati i više sati. U drugom taktu automatski uređaj ukopča električni grijač, koji je smješten unutar apsorbera. Grijanjem iz apsorpcionog sredstva izlazi plinoviti amonijak i povećava pritisak u uređaju. On je još u tvornici bio reguliran na nešto ispod 6,5 atmosfera. Kad se iz apsorbera oslobodi toliko plinovitog amonijaka, da tlak naraste iznad 6,5 atmosfera, sav plinoviti amonijak ohlađen u kondenzatoru pretvara se u tekućinu i teče u spremnik, a odavde ponovo u isparivač. U času kad su sve pare izašle iz apsorbera, automatski se iskopča grijač, pa je svršio i drugi takt. Ohlađivanjem je apsorpciono sredstvo dobilo ponovo sposobnost apsorpcije, pa hladnjak opet radi u prvom radnom periodu. Čitav se proces dalje ponavlja.

Ako se za rashladno sredstvo uzima amonijak NH_3, apsorpciono sredstvo je obično kalcijev klorid $CaCl_2$. U apsorberu se tada zbiva ova kemijska reakcija:

$$CaCl_2 \cdot 8NH_3 \rightleftarrows CaCl_2 \cdot 2NH_3 + 6\,NH_3$$

U prvom radnom periodu ona teče zdesna nalijevo, a u drugom slijeva nadesno.

Osim amonijaka rashladno sredstvo može biti i sumporni dioksid SO_2, ugljični dioksid CO_2, metil klorid CH_3Cl i difluordiklormetan CF_2Cl_2. Isto tako kao i pojavu apsorpcije može se iskoristiti i pojavu adsorpcije na sredstvima s velikom površinom kao na primjer aktivni ugljen + amonijak i silikagel + sumporni dioksid. Princip rada hladnjaka s tim kombinacijama identičan je s radom apsorpcionih, čiji rad je malo prije objašnjen.

Ogorelec Zvonimir

Dopuna aritmetičkim operacijama

»Matematičko-fizički list« 4-5 (1951/52) doneo je jedan prikaz o stepenu

$$9^{9^9} \qquad (1)$$

prema podacima iz Lietzmann-ove knjige Riesen und Zwerge im Zahlenreich (1916). Tu se, između ostalog, spominje da stepen (1) ima dve vrednosti, što zavisi od mogućnosti pisanja eksponenta

$$(9^9)^9 \qquad 9^{(9^9)}$$

a pri čemu je znatno

$$(9^9)^9 < 9^{(9^9)}$$

Poznato je, da je sposobnost izračunavanja stepena (1) vrlo ograničena, jer je pojedinac u vremenskoj nemogućnosti obrade. Smeta i malobrojnost cifarskih mesta na običnim električnim računskim mašinama.

Prema jednom američkom časopisu za numeričku matematiku, spomenuti broj (1) ima više od $\frac{1}{3}\,10^9$ cifara i počinje ovim redom 428124773175747 ...

Međutim, u novije vreme, matematičke mašine (»elektronski mozgovi«), na primer mašina IBM MARK I (USA), mogu da odrede sve cifre stepena (1). Broj dobijenih cifara toliko je veliki, da pantljika na kojoj izlaze cifre (uređaj za dobijanje rezultata), treba da je duga 1200 kilometara ili, ako bi se cifre rezultata štampale u formi svezaka (slično kao logaritamske tablice) tada bi bile potrebne 33 sveske po 800 stranica (svaka stranica imala bi 1400 cifara)!

Potstaknut ovim pitanjima, a naročito upadljivom činjenicom da stepen (1) ima dve vrednosti, što nije slučaj sa aritmetičkim operacijama — pisac ovih redova želi da obavesti srednjoškolce o takozvanoj »višoj etapi stepenovanja« ili iteriranom stepenu. Ovde odmah treba spomenuti, da iz ove oblasti aritmetike imamo malo opsežne literature. Poznati su samo radovi Gerlach-a i Schröder-a, kao i našeg Jugoslavena Br. Petronijevića.

Sabiranje $(a+b)$, množenje $(a \cdot b)$ i stepenovanje (a^b) tri su prve direktne aritmetičke operacije. Svaka od njih da se definisati kako independentno tako i rekurentno,[1] pri čemu obe definicije vode istom krajnjem rezultatu koji se u običnoj aritmetici identifikuje sa samom definicijom.

Četvrta direktna operacija ima osobinu ponovljenog stepenovanja i pretstavlja se izrazom ${}^b a$ koja po opštoj definiciji ima oblik[2]

$$ {}^b a = a^{a^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{a}}}}} \quad b \text{ puta} \qquad (2) $$

Kod (2) izložićemo pojedine posebne operacije, dokaz stava da zakon distribucije ne važi kao i dva primera na kojima se vidi višeznačnost u rezultatima.

Posebne operacije se dobijaju iz (2) ako b (levi izložilac) uzme razne vrednosti

$$ n+m,\ n+1,\ 1+n,\ 2^n $$

gde su n i m prirodni brojevi. Tako za $b = n+m$ imamo da je

$$ {}^{n+m} a = a^{a^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{a}}}}} \quad \begin{matrix} m \text{ puta} \\ n \text{ puta} \end{matrix} = ({}^n a)^{({}^m a)} \qquad (3) $$

pri čemu se $n+m$ ne sme shvatiti kao izvedena već samo kao zadata suma.

Za $b = n+1$ Gerlach odbacuje postojanje iteriranog stepena, jer se dobijeni izraz svodi na obično stepenovanje, t. j.

$$ {}^{n+1} a = a^{({}^n a)} \qquad (4) $$

Dokaz relacije (4) je jednostavan

$$ {}^1 a = a $$

$$ {}^2 a = {}^{1+1} a = ({}^1 a)^{({}^1 a)} = a^a $$

$$ {}^3 a = {}^{2+1} a = ({}^2 a)^{({}^1 a)} = (a^a)^a = a^{(a^2)} $$

$$ {}^4 a = {}^{3+1} a = ({}^3 a)^{({}^1 a)} = \left[(a^a)^a\right]^a = a^{(a^3)} $$

$$ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots $$

$$ {}^{n+1} a = ({}^n a)^{({}^1 a)} = \cdots = a^{({}^n a)} $$

Iznesimo još posebnu operaciju za slučaj $1+n$ koja se svodi na izraz

$$ {}^{1+n} a = a^{(a^{(a^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{a}}}})}} \quad n \text{ puta} \qquad (5) $$

koji važi za svako celobrojno n i $a > 0$

Dokaz relacije (5) proizlazi iz veze (3)

$$ {}^2 a = {}^{1+1} a = ({}^1 a)^{({}^1 a)} = a^a $$

$$ {}^3 a = {}^{1+2} a = ({}^1 a)^{({}^2 a)} = a^{(a^a)} $$

$$ {}^4 a = {}^{1+3} a = ({}^1 a)^{({}^3 a)} = a^{\left[a^{(a^a)}\right]} $$

$$ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots $$

$$ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots $$

$$ {}^{1+n} a = ({}^1 a)^{({}^n a)} = \cdots = a^{(a^{(a^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{a}}}})}} \quad n \text{ puta} $$

Ovde možemo da primetimo sledeće. Sve relacije (2)—(5) prikazane su rekurentnom definicijom i razlikuju se jedna

---

[1] Na primer, kod stepenovanja imamo da je independentna definicija

$$ a^b = a^{1+1+\cdots+1} = \underbrace{a \cdot a \cdot \cdots \cdot a}_{b \text{ puta}} $$

a rekurentna

$$ a^b = a^{n+1} = a^a \cdot a = \cdots = \underbrace{a \cdot a \cdot \cdots \cdot a}_{b \text{ puta}} $$

[2] Za početni primer (1) imamo da je ${}^3 9$

od druge za $n > 1$. Zatim, postoji mogućnost različitih interpretacija za svako drugo $b = \varphi(n)$, gde je $\varphi(n)$ celobrojna funkcija, a što ovde ne iznosimo.

Iz ove činjenice, da se za različite slučajeve levog izložioca b dobijaju posebne operacije, kao i činjenice da distributivni zakon ne važi

$$n + ma \neq m + na$$

proizlazi višeznačnost u rezultatima iteriranog stepena.

Na primer za stepen (1) imamo dve vrednosti i to:

$$^3 9 = {}^{2+1}9 = (^2 9)^9 = (9^9)^9 = 9^{81}$$
$$^3 9 = {}^{1+2}9 = 9^{(9^9)} = 9^{387420489}$$

Pak, za $^4 3$ imamo pet vrednosti, i to:

$$^4 3 = {}^{3+1}3 = {}^{(2+1)+1}3 = \left[(3^3)^3\right]^3 = (3^9)^3 = 3^{27}$$
$$^4 3 = {}^{3+1}3 = {}^{(1+2)+1}3 = \left[3^{(3^3)}\right]^3 = 3^{81}$$
$$^4 3 = {}^{2+2}3 = (3^3)^{(3^3)} = 27^{27}$$
$$^4 3 = {}^{1+3}3 = 3\left[(3^3)^3\right] = 3^{(3^9)}$$
$$^4 3 = {}^{1+3}3 = 3\left[3^{(3^3)}\right] = 3^{(3^{27})}$$

Na osnovu prikazanih posebnih operacija (3), (4), (5) i primera za $^4 3$ neka čitalac dokaže da iterirani stepen $^5 3$ ima četrnaest vrednosti.

Dragan Trifunović, Beograd

Kako ćemo naći nepoznanice u zadatku a da ne postavljamo jednadžbe?

Kojiput možemo riješiti i zadatak s više nepoznanica, iako ne možemo postavljati jednadžbe, koje će nam odrediti nepoznanice, već se samo služimo logičkim zaključivanjem, uzimajući u obzir intervale, unutar kojih se nepoznanice mogu kretati. Čak i ti intervali ne moraju imati posve određene granice. Na pr.

Jednog prijepodneva, krajem mjeseca, a nekoliko godina po završetku II. svj. rata, naletio je mali automobil, pretrpan putnicima, na stup uz pločnik. Skupilo se mnogo ljudi, pristupio je i dežurni milicioner. — Znamo samo produkt 137 170 sata, dana i mjeseca, kad se to dogodilo, te broja putnika u automobilu i još jednog broja. Koje se to godine dogodilo i koji broj cipela nosi milicioner?

Rastavimo produkt 137 170 u faktore:

137 170	2
68 585	5
13 717	11
1 247	29
43	43
1	

(Broj 1247 rastavljamo u faktore pokušavanjem: dijeljenjem pribrojevima 13, 17, ... i t. d. ili pomoću tablica za primbrojeve, odnosno složene brojeve).

Budući da se događaj zbio *prije podne*, to može biti samo u **11** sati (da se je dogodio u 2 ili 5 sati, rekli bismo, da se dogodio *ujutro*). Ako je to bilo *krajem mjeseca*, to je moglo biti samo **29**. U malom *pretrpanom* automobilu bilo je 5 putnika (jer s dva putnika nije automobil pretrpan). Ostaju među faktorima brojevi 2 i 43. Broj 2 mora biti redni broj mjeseca, kad se događaj zbio; dakle je to bilo 29. II. (u 11 sati dopodne); a budući da je to bilo *nekoliko* godina po svršetku II. svjet. rata, moglo je to biti samo 1948. Dežurni milicioner nosi cipele broj 43.

V. J.

„Dokaz" da je *i* realan broj

$$(1 + i\sqrt{3})^3 = 1 + 3i\sqrt{3} + 3 \cdot 3i^2 + 3\sqrt{3}i^3 =$$
$$= 1 + 3i\sqrt{3} - 9 - 3i\sqrt{3} = -8.$$

Dakle

$$(1 + i\sqrt{3})^3 = -8, \quad (1 + i\sqrt{3})^3 + 2^3 = 0,$$

a odatle, zbog $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$

$$(1 + i\sqrt{3}) + 2 = 0 \qquad 3 + i\sqrt{3} = 0 \mid : \sqrt{3}$$
$$\sqrt{3} + i = 0 \qquad i = -\sqrt{3}.$$

Dakle i je realan broj! Gdje je griješka?

Kulišić Petar, svrš. uč. g., Dubrovnik

Rad pogrešan, a rezultat tačan!

Jovica je dobio zadatak da izrazi

$$\sin(\alpha + \beta) \cdot \sin(\alpha - \beta)$$

pomoću funkcija uglova α i β. On je to ovako učinio: kako je

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha + \sin\beta$$
$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha - \sin\beta$$

to je

$$\sin(\alpha + \beta) \cdot \sin(\alpha - \beta) = (\sin\alpha + \sin\beta) \cdot$$
$$\cdot (\sin\alpha - \sin\beta) = \sin^2\alpha - \sin^2\beta.$$

No Nikola je posumnjao u tačnost ovog rezultata. Da bi ga proverio uzeo je za α i β posebne vrednosti: $\alpha = 60°$ i $\beta = 30°$ i dobio:

$$\sin(60°+30°)\cdot\sin(60°-30°) = \sin^2 60° - \sin^2 30°$$
$$\sin 90°\cdot\sin 30° = \sin^2 60° - \sin^2 30°$$
$$1\cdot\frac{1}{2} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2$$
$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Znači, rezultat je ispravan.

— Čestitam ti, Jovice, uzviknu Nikola, elegantno si rešio zadatak.

Međutim Nikola se prevario, jer je Jovica u radu učinio grubu grešku. Pronađite je!

Kako bi se dobio isti rezultat pravilnim radom?

Nastasić Dimitrije, prof. Bečej

24 · 63 = 42 · 36 i slične jednakosti

Brojevi 24 i 63 imaju svojstvo da im se produkt ne promijeni, ako u svakom od tih brojeva međusobno zamijenimo (permutiramo) cifre. Zaista je $24 \cdot 63 = 42 \cdot 36 = 1512$.

Da li ima još parova dvocifrenih brojeva s takvim svojstvom? Kako da sistematski nađemo sve slučajeve? (Isključit ćemo t. zv. trivijalne slučajeve, kao što su $33 \cdot 55 = 33 \cdot 55$, $13 \cdot 31 = 31 \cdot 13$).

Ako cifre traženih brojeva označimo s x i y, z i t, vrijedit će jednadžba

$$(10x + y)(10z + t) = (10y + x)(10t + z).$$

Ako je uredimo, dobivamo

$$xz = yt,$$

gdje su x, y, z, t prirodni jednocifreni brojevi. Kušanjem potražimo sve mogućnosti za te brojeve (koje ne vode do ponavljanja). Dolazimo do 14 jednakosti: $1\cdot4=2\cdot2$, $1\cdot6=2\cdot3$, $1\cdot6=3\cdot2$, $1\cdot8=2\cdot4$, $1\cdot8=4\cdot2$, $1\cdot9=3\cdot3$, $2\cdot6=3\cdot4$, $2\cdot6=4\cdot3$, $2\cdot8=4\cdot4$, $2\cdot9=3\cdot6$, $2\cdot9=6\cdot3$, $3\cdot8=4\cdot6$, $3\cdot8=6\cdot4$, $4\cdot9=6\cdot6$. Iz njih dobivamo 14 mogućih rješenja našeg zadatka:

$12\cdot42 = 21\cdot24$	$24\cdot63 = 42\cdot36$
$12\cdot63 = 21\cdot36$	$24\cdot84 = 42\cdot48$
$13\cdot62 = 31\cdot26$	$23\cdot96 = 32\cdot69$
$12\cdot84 = 21\cdot48$	$26\cdot93 = 62\cdot39$
$14\cdot82 = 41\cdot28$	$34\cdot86 = 43\cdot68$
$13\cdot93 = 31\cdot39$	$36\cdot84 = 63\cdot48$
$23\cdot64 = 32\cdot46$	$46\cdot96 = 64\cdot69$

M. K.

Zanimljivo grafičko rješenje kvadratne jednadžbe

Korijeni jednadžbe $z^2 + az + b = 0$ jesu

$$z_{1,2} = -\frac{a}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{a^2 - 4b}.$$

Ako u pravokutnom koordinatnom sustavu (x, y) nacrtamo pravac $p \equiv y + 1 = 0$ i točke $F(0, 1)$, $T(-a, b)$, kružnica k sa središtem u T i s polumjerom $= TF$ siječe pravac p u točkama, kojima su apscise $x_1 = 2z_1$, $x_2 = 2z_2$.

Dokaz: Jednadžba kružnice k je

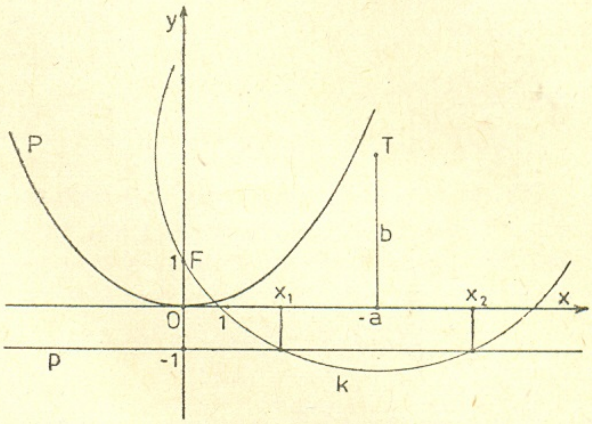
$$(x + a)^2 + (y - b)^2 = a^2 + (1 - b)^2 \quad \text{ili}$$
$$x^2 + y^2 + 2ax - 2by = 1 - 2b.$$

Apscise točaka, u kojima ta kružnica siječe pravac p, jesu korijeni jednadžbe

$$x^2 + 2ax + 4b = 0$$

i prema tome je $x_{1,2} = -a \pm \sqrt{a^2 - 4b}$, t. j. $x_1 = 2z_1$, $x_2 = 2z_2$.

Parabola $P \equiv x^2 - 4y = 0$, kojoj je F fokus, a p ravnalica, ima u grafikonu ulogu diskriminante $a^2 - 4b$ zadane jednadžbe, pa su korijeni z_1 i z_2 realni i različiti, realni i jednaki ili konj. kompleksni prema tome, da li točka T leži izvan, na ili unutar parabole P.



Gornje rješenje ima točnost obično upotrebljavanih graf. rješenja, kad su ta crtana u dvostrukom mjerilu. *S. Šk-a*

NOVE KNJIGE

D. S. Mitrinović:

VAŽNIJE NEJEDNAKOSTI

Izašla je 7. sveska Matematičke biblioteke, koja nosi naslov »Važnije nejednakosti«, a napisao ju je Dr. D. S. Mitrinović, profesor na Elektrotehničkom fakultetu Sveučilišta u Beogradu.

Nejednakosti, koje se ovdje dokazuju, podijeljene su na ove grupe:

1. Nejednadžbe, u kojima se pojavljuju moduli.
2. Neke elementarne nejednakosti.
3. Srednje veličine (vrlo važne nejednakosti u teoriji vjerojatnosti, matematičkoj statistici, u matematičkoj obradi eksperimentalnh podataka).
4. Jensenova nejednakost.
5. Razne nejednakosti.

Na kraju je dodana zbirka od oko 300 raznih nejednakosti s naznakom literature gdje je nejednakost objavljena s dokazom ili bez njega.

Knjižica je posvećena uspomeni Dr. Mihaila Petrovića te je na početku knjižice donesen lijepi prikaz njegova života i rada kao i njegovih zasluga za razvoj matematičkih nauka u svijetu.

U predgovoru daje autor historijski razvoj nauka o nejednakostima i njihovoj važnosti u aproksimativnim rješenjima problema iz raznih grana teoretske i primjenjene matematike.

Učenici gimnazija i srednjih stručnih škola koji poznaju prve početke iz područja nejednakosti a upućeni su i u metode matematike indukcije, lako mogu pratiti izlaganja i dokazivanja u ovoj knjizi. Ona se preporuča svima, koji hoće proširiti svoj matematički horizont i steći dublja i profinjena znanja u matematici.

Knjižica može također odlično poslužiti kao priručnik za matematičke grupe po školama, gdje bi se mogle obrađivati i dokazivati pojedine nejednadžbe iznesene u knjižici. *S. Š.*

ZADACI I RJEŠENJA

A) Zadaci iz matematike*

321. Date su strane trougla ABC:

$AB = 8\ cm,\quad BC = 7\ cm,\quad CA = 5\ cm.$

Jedna prava, koja seče AB y D, a AC y E, deli trougao ABC na trougao ADE i četvorougao $BCED$. Neka je $AD=x$, $AE=y$.

a) Izraziti y kao funkciju od x iz uslova da trougao ADE i četvorougao $BCED$ imaju jednake obime.

b) Izraziti y kao funkciju od x kad su površine pomenutih delova jednake.

v) Odrediti x i y tako da ti delovi imaju u isto vreme jednake i obime i površine.

Rezultat proverit na grafičima funkcija iz *a*) i *b*).

322. Data su tri polinoma $P = (bx + c)^2 + (b_1x + c_1)^2$, $Q = (cx + a)^2 + (c_1x + a_1)^2$, $R = (ax + b)^2 + (a_1x + b_1)^2$. Dokazati: ako su P i Q potpuni kvadrati, onda je i R potpuni kvadrat.

323. Data je jednačina

$$ax^2 + bx + c = 0,\quad (b^2 - 4ac \geqq 0),$$

čiji su korени x_1 i x_2.

a) Izraziti kao funkciju od a, b i c proizvod

$$P = (x_1 - kx_2)(x_2 - kx_1),$$

gde je k dati broj.

Odatle izvesti uslov između a, b i c, kad je razmera korena jednaka broju k.

b) Uz pretpostavku da je taj uslov ispunjen, pokazati da se korени mogu izraziti kao racionalne funkcije od a, b i k.

324.* Razriješiti sistem od 101 jednadžbe sa 101 nepoznanicom:

$$x_1+x_2+x_3 + \cdots + x_{100} + x_{101} = 0,$$
$$x_1 + x_2 = x_2 + x_3 = x_3 + x_4 = \cdots =$$
$$= x_{99} + x_{100} = x_{100} + x_{101} = 1.$$

325.* Baza piramide je romb s dijagonalama 6 m i 8 m. Visina piramide pada u sjecište dijagonala, a iznosi 1 m. Naći oplošje piramide!

326. Od pravokutne staklene ploče ($a=120$ cm, $b = 90$ cm) odlomio se na jednom uglu trokutasti dio s katetama 36 cm (na stranici a) i 30 cm (na stranici b). Iz većeg okrnjenog dijela treba izrezati pravokutnu ploču maksimalne površine. Kolike su dimenzije nove ploče?

327. U točkama A i B istostrane hiperbole povučene su tangente t_1 i t_2. Točkom A povučena je paralela s t_2, a točkom B s t_1; te se paralele sijeku u C. Dokaži, da kružnica određena središtem O hiperbole i točkama A i B prolazi i točkom C!

328. Riješi jednadžbu

$$tg\,2x = m\,tg\,x.$$

Diskusija!

* Zadaci označeni zvjezdicom predviđeni su prvenstveno za 14-16 godišnje učenike.

329. Dokaži s pomoću računa derivacija da je $y = sin^6 x + 3 sin^2 x \, cos^2 x + cos^6 x$ stalni broj t. j. da ne zavisi o x. (Treba dokazati da je $y' = 0$).

330. Izračunaj derivaciju od

$$a)\ y = \frac{(1 + sin\, x)^2}{sin\, x\,(1 - sin\, x)}, \quad b)\ y = \frac{x\,(3 + 2x^2)}{3\sqrt{(1 + x^2)^3}}.$$

331. U kojem se području ravnine mora nalaziti točka $M\,(a, b)$, ako jednadžba

$$4x^2 + 4\,(a + b)\,x + a^2 + b^2 = 0$$

ima oba svoja korijena sadržana između -1 i $+1$?

332. Konstruiraj pravokutni trokut, komu je zadan polumjer opisane kružnice r i polumjer upisane kružnice ρ.

333. Točke $A\,(-3, -1)$ i $C\,(5,5)$ vrhovi su trokuta, a $S\left(1, -\frac{1}{2}\right)$ je središte tome trokutu upisane kružnice. Nađi koordinate trećeg vrha B trokuta.

334.* $(3 \cdot \quad 4)^2 = 492 \quad 04$

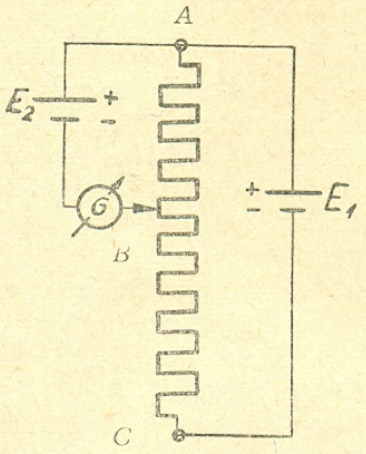
Koje tri cifre su nagorjele?

B) Zadaci iz fizike

161. Sanduk težine 5 kp klizi bez akceracije niz hrapavu kosinu nagiba 30^0. Koliki je koeficijent trenja? Kolika horizontalna sila je potrebna, da bi se on gibao uzbrdo bez akceleracije po istoj kosini?

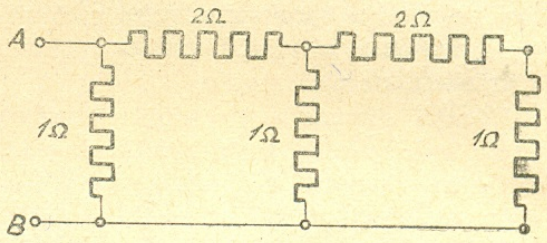
162. Temperatura vode kod ulaza u sistem za centralno grijanje je 82^0C, a kod izlaza iz sistema temperatura vode je 48^0C. Želimo zamijeniti vodu s vodenom parom od 100^0C, koja bi ulazila u sistem pod atmosferskim pritiskom, dok bi na izlazu iz sistema imali vodu od 82^0C. Nađite omjer mase vode m_1, odnosno mase vodene pare m_2, ako je toplina predana okolini ista u oba slučaja.

163. Zadan je krug struje prikazan shemom na sl. 1. Otporna žica AC duga je 100 cm. Galvanometrom ne teče struja, kad je $AB = 42$ cm. Kolika je tada elektromotorna sila E_2? Baterija E_1 ima elektromotornu silu 1,5 V i zanemarivo mali unutarnji otpor.



Sl. 1.

164. Koliki otpor između stezaljka A i B pruža mreža otpora prikazana shemom na sl. 2.?



Sl. 2.

165. Svijeća je udaljena 20 cm od pozitivne leće, koja daje realnu sliku te svijeće. Slika je jednako udaljena od leće i jednake veličine kao predmet. Druga leća namještena je iza prve tako, da se obje leće dodiruju. Te dvije leće sada daju sliku svijeće, koja je umanjena u omjeru prema svijeći kao 1 : 4. Kolike su žarišne daljine leća i gdje se nalazi konačna slika svijeće?

C) Rješenja iz matematike

304. *Решити неједначину:*

$$sin^2 x - 3\, sin\, x\, cos\, x - 2 > cos\, 2\, x.$$

Решење: $sin^2 x - 3\, sin\, x\, cos\, x - cos^2 x +$
$+ sin^2 x > 2\,(sin^2 x + cos^2 x)$

јер је $sin^2 x + cos^2 x = 1$ па не мења вредност.

Svedemo li ovu nejednačinu dobićemo da je:

$$\sin x \cos x + \cos^2 x < 0$$

Dijeljenjem te nejednačine s $\cos^2 x$, dobićemo da je: $\operatorname{tg} x + 1 < 0$, $\operatorname{tg} x < -1$, $90^0 < x < 135^0$ i uopće $90^0 + k \cdot 180^0 < x < 135^0 + k \cdot 180^0$

$(k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3 \ldots)$

Prlinčević Ratomir, uč. 7_3 p. g. Priština

305. *Između svih valjaka upisanih u kuglu polumjera r, neka se odredi onaj, koji ima najveće oplošje.*

Ako sa x označimo visinu valjka, a sa ρ njegov polumjer (po Pitagorinom poučku $\rho = \sqrt{r^2 - \frac{x^2}{4}}$), tada je oplošje valjka jednako

$$O = 2\pi\left(r^2 - \frac{x^2}{4} + x\sqrt{r^2 - \frac{x^2}{4}}\right). \quad (1)$$

Načinimo prvu derivaciju

$$O' = 2\pi\left(-\frac{x}{2} + \sqrt{r^2 - \frac{x^2}{4}} - \frac{x^2}{4\sqrt{r^2 - \frac{x^2}{4}}}\right) \quad (2)$$

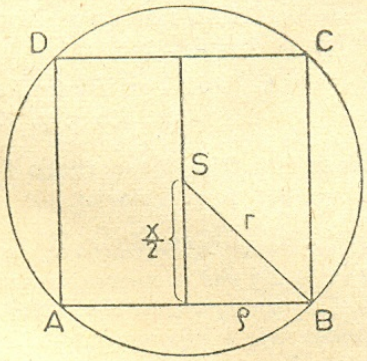
i nađimo vrijednosti za koje se ona poništava.

$$2\pi\left(-\frac{x}{2} + \sqrt{r^2 - \frac{x^2}{4}} - \frac{x^2}{4\sqrt{r^2 - \frac{x^2}{4}}}\right) = 0, \quad (3)$$

ili $$x\sqrt{r^2 - \frac{x^2}{4}} = 2r^2 - x^2,$$

što nakon kvadriranja i sređivanja prelazi u

$$5x^4 - 20x^2r^2 + 16r^4 = 0. \quad (4)$$



Pozitivna rješenja ove jednadžbe jesu:

$$x_1 = r\sqrt{2 + 2\sqrt{\frac{1}{5}}}; \quad x_2 = r\sqrt{2 - 2\sqrt{\frac{1}{5}}}.$$

Uvrštavanjem ovih vrijednosti u jednadžbu (3) vidimo da je zadovoljava samo rješenje $x_2 = r\sqrt{2 - 2\sqrt{\frac{1}{5}}}$, dakle se prvo rješenje uvuklo u jednadžbu prilikom kvadriranja.

(Mora biti $2r^2 > x^2$).

Suptitucijom vrijednosti za

$$x = r\sqrt{2 - 2\sqrt{\frac{1}{5}}}$$

u jednadžbu (1), nalazimo da je maksimalno oplošje valjka upisanog u kuglu

$$M = r^2\pi(1 + \sqrt{5}).$$

Baličević Ivan, uč. 8b r. g., Vukovar

306. *Koji uvjet mora biti ispunjen, da se jednadžba*

$$x^3 + px + q = 0 \quad (1)$$

može napisati u obliku

$$x^4 - (x^2 + ax + b)^2 = 0 \quad (2)$$

Primjena: riješi jednadžbu: $8x^3 - 36x + 27 = 0$.

Izradba:

Ako oblik (2) razvijemo, i normiramo, možemo tada uslijed identičnosti oblika (1) i (2) izjednačiti koeficijente istih potencija pa dobivamo sistem:

$$\frac{a^2 + 2b}{2a} = 0, \quad (3) \qquad b = p, \quad (4) \qquad \frac{b^2}{2a} = q. \quad (5)$$

Ova sistem je moguć samo onda, ako je ispunjen uvjet

$$p^3 + 8q^2 = 0, \quad (6)$$

što je ujedno i uvjet, da se trinom (1) dade napisati u obliku (2).

Kod jednadžbe

$$8x^3 - 36x + 27 = 0 \quad (7)$$

je $p = -\frac{9}{2}$, $q = \frac{27}{8}$ i uvjet (6) je ispunjen:

$$\left(-\frac{9}{2}\right)^3 + 8\left(\frac{27}{8}\right)^2 = 0.$$

Rješavanjem sistema (4) (5) nađe se da je u ovom slučaju: $a = 3$, $b = -\frac{9}{2}$ i jednadžba (7) prelazi u oblik

$$x^4 - \left(x^2 + 3x - \frac{9}{2}\right)^2 = 0,$$

što se raspada u dvije jednadžbe

$$-3x + \frac{9}{2} = 0, \quad 2x^2 + 3x - \frac{9}{2} = 0.$$

Njihova su rješenja:

$$x_1 = \frac{3}{2}, \quad x_{2,3} = \frac{3}{4}(-1 \pm \sqrt{5}).$$

Baličević Ivan, uč. 8b g. Vukovar

307. *Isporedi korijene jednadžbi*

$$x^2 + x(1-\lambda) - 2\lambda - 6 = 0$$

i

$$x^2 - \lambda x + \lambda = 0$$

prema vrijednostima od λ; *zadatak riješi i grafički.*

Moramo odrediti:

1) rezultantu jednadžbi, t. j.

$$R = 6\lambda^2 + 31\lambda + 36,$$

njezini su korijeni

$$\lambda_1 = \frac{1}{12}(-31 - \sqrt{97}) \approx -3{,}40 \quad \text{i}$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{12}(-31 + \sqrt{97}) \approx -1{,}76;$$

$R > 0$ za $\lambda_1 > \lambda > \lambda_2$ i $R < 0$ za $\lambda_1 < \lambda < \lambda_2$.

2) diskriminante δ_1 i δ_2 prve i druge jednadžbe; $\delta_1 = \lambda^2 + 6\lambda + 25$ i uvijek je $\delta_1 > 0$; $\delta_2 = \lambda^2 - 4\lambda$, $\delta_2 > 0$ za $0 > \lambda > 4$ i $\delta_2 < 0$ $0 < \lambda < 4$.

3) U slučaju da je $R > 0$, znak od $f_2(x_1)$ ili od $f_2(x_2)$, koji je isti kao i znak od

$$f_2(x_1) + f_2(x_2) = 5\lambda + 13.$$

Taj je znak negativan za $\lambda < -2{,}6$, a pozitivan za $\lambda > -2{,}6$.

4) Ako je $R > 0$, znak od $f_1(x'_1)$ ili od $f_1(x'_2)$, koji je isti kao i znak od $f_1(x'_1) + f_2(x'_2) = -5\lambda - 12$; znak je pozitivan za $\lambda < -2{,}4$, a negativan za $\lambda > -2{,}4$.

Dobili smo dakle ove karakteristične vrijednosti od λ poredane rastući: $\lambda_1 \approx -3{,}40$, $\lambda_2 \approx -1{,}76$, 0, 4. Radi preglednosti načinimo sada tablicu. U prvom stupcu su pojedini intervali između istaknutih vrijednosti od λ, u drugom znak od R, u trećem i četvrtom znakovi od δ_1 i δ_2, u petom i šestom znakovi od $a_2 f_2(x_1)$ i $a_1 f_1(x'_1)$ (samo kad je $R > 0$), a konačno u sedmom poredaj korijena za pojedini otvoreni interval.

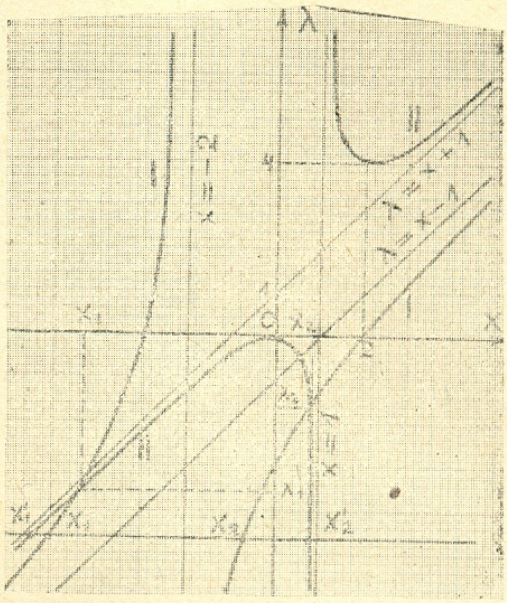
λ	R	δ_1	δ_2	$a_2 f_2(x_1)$	$a_1 f_1(x'_1)$	Poredaj
λ_1	+	+	+	−	+	$x_1' < x_1 < x_2 < x_2'$
λ_2	−	+	+			$x_1 < x_1' < x_2 < x_2'$
0	+	+	+	+	−	$x_1 < x_1' < x_2' < x_2$
4	+	−	+	+	−	—
	+	+	+	+	−	$x_1 < x_1' < x_2' < x_2$

Prvi, treći i četvrti poredaj potpuno su određeni navedenim uvjetima, dok je za drugi potrebno još

$$-(1-\lambda) < -(-\lambda), \quad -1 < 0,$$

a to je uvijek ispunjeno.

Zadatak se može riješiti i grafički. U pravokutnom koordinatnom sistemu $x\,0\,\lambda$ nacrtat ćemo krivulje zadanih jednadžbi.



Prva krivulja (I)

$$\lambda = \frac{x^2 + x - 6}{x + 2} = x - 1 - \frac{4}{x + 2}$$

ima asimptote $\lambda = x - 1$ i $x = -2$.

Druga krivulja (II)

$$\lambda = \frac{x^2}{x - 1} = x + 1 + \frac{1}{x - 1}$$

ima asimptote $\lambda = x + 1$ i $x = 1$, zatim ima maksimum 0 za $x = 0$ i minimum 4 za $x = 2$.

Obje jednadžbe imaju realne korijene, kad je λ izvan intervala (0,4). Za određenu vrijednost od λ pravac, koji se povlači paralelno s osi x, ima s krivuljom (I) presjecišta x_1 i x_2, a s krivuljom (II) presjecišta x'_1 i x'_2; zatim razlikujemo sve bitno različite položaje korijena, koji su navedeni u tablici.

Basar Ivan
uč. 8.b r. g. Karlovac

Zadatak je isto tako lijepo riješio i *Baličević Ivan*, uč. 8. b r. g. Vukovar.

308. *Обим датог правоугаоника, изражен у метрима, је* $2s$; *кад се његова дужина продужи за* 5 *m, а ширина за* 3 *m, добије се нов правоугаоник чија је површина за* 195 m^2 *већа од површине датог правоугаоника.*

Нека су x *и* y *дужина и ширина датог правоугаоника.*

а) *Изразити* x *и* y *као функцију од* s,

б) *За које вредности* s *је проблем могућ?*

в) *Одредити* s *кад се дати правоугаоник своди на квадрат.*

а) Из $2x + 2y = 2s$

$$(x + 5)(y + 3) = xy + 195$$

следи $x = \frac{5s - 180}{2}$, $y = \frac{180 - 3s}{2}$

б) $x > 0$, $y > 0$

$$\frac{5s - 180}{2} > 0, \quad \frac{180 - 3s}{2} > 0$$

$s > 36$, $s < 60$ тј. $60 > s > 36$, проблем је могућ ако је s веће од 36 а мање од 60.

в) Из $(x + 5)(x + 3) = x^2 + 195$ излази $8x = 180$, $2x = 45 = s$. Кад се дати правоугаоник сведе на квадрат s мора бити 45 m.

Стојаковић Зоран
5 ц р. г. „Св. Марк.“ Нови Сад

309. *Data je kvadratna jednačina*

$$16x^2 - 24x \sin\alpha + 2 - 3\sin\alpha = 0$$

u kojoj α pretstavlja ugao jednog trougla.

Za koje vrijednosti α su korijeni jednačine realni?

Izraziti $tg\frac{\alpha}{2}$ za najmanju moguću vrijednost ugla α.

Da bi korijeni bili realni mora $D \geqq 0$

$$D = 576\sin^2\alpha - 64(2 - 3\sin\alpha) =$$
$$= 576\sin^2\alpha - 128 + 192\sin\alpha \geqq 0 \quad \text{ili}$$
$$576\sin^2\alpha - 128 + 384\sin\alpha - 192\sin\alpha \geqq 0$$
$$6\sin\alpha(96\sin\alpha + 64) - 2(96\sin\alpha + 64) \geqq 0$$
$$(96\sin\alpha + 64)(6\sin\alpha - 2) \geqq 0$$

rješenja ove nejednakosti su:

$$\sin\alpha \leqq -\frac{2}{3} \quad \text{i} \quad \sin\alpha \geqq \frac{1}{3}$$

Pošto α pretstavlja ugao trougla ($\alpha < 180°$) to prvo rješenje $\left(\sin\alpha \leqq -\frac{2}{3}\right)$ otpada jer njemu odgovaraju rješenja ugla veća od 180°.

Dakle vrijednosti od α koje zadovoljavaju leže u granicama:

$$180° > \alpha \geqq 18°\,26'\,6''$$

Najmanji ugao je onaj kojem odgovara najmanja vrijednost „$\sin\alpha$“ (do 90°). Pošto nam je poznata vrijednost „$\sin\alpha_{min}$“ možemo odrediti $tg\frac{\alpha}{2}$.

$$tg\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos\alpha}{1 + \cos\alpha}}$$

$$\cos\alpha = \sqrt{1 - \sin^2\alpha} = \sqrt{1 - \frac{1}{9}} = \sqrt{\frac{8}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$tg\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{3 - 2\sqrt{2}}{3 + 2\sqrt{2}}}.$$

Dvizac Menail, II Am Mostar

310. *Data je jednačina $ax^2 + bx + c = 0$ (1). Koji uslov treba da ispune a, b i c kad su korijeni jednačine (1) vezani relacijom (2) $\alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma = 0$ gdje su α, β i γ dati brojevi? Pokazati da su pri uslovu (2) korijeni jednačine (1) realni i da se mogu izraziti racionalno.*

Из $\alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma = 0$

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$$

следи $x_1 = \frac{b\beta - a\gamma}{a(\alpha - \beta)}$, $x_2 = \frac{a\gamma - b\alpha}{a(\alpha - \beta)}$,

а сменом тих вредности у једначини

$$\frac{c}{a} = x_1 x_2 \quad \text{имамо}$$

$$\frac{b\beta - a\gamma}{a(\alpha - \beta)} \cdot \frac{a\gamma - b\alpha}{a(\alpha - \beta)} = \frac{c}{a} \quad \text{или}$$

$$(b\alpha - a\gamma)(a\gamma - b\beta) = ac(\alpha - \beta)^2 \quad (3).$$

Дискриминанта једначине (1) уз услов (3) износи

$$D = b^2 - 4ac = b^2 - \frac{4(b\alpha - a\gamma)(a\gamma - b\beta)}{(\alpha - \beta)^2} =$$
$$= \frac{b^2(\alpha + \beta)^2 - 4b(\alpha + \beta)a\gamma + 4a^2\gamma^2}{(\alpha - \beta)^2} =$$
$$= \left(\frac{b(\alpha + \beta) - 2a\gamma}{\alpha - \beta}\right)^2.$$

Дакле су корени x_1 и x_2 реални и изражени су рационално.

Диниħ Александар
7_2 р. г. „Ст. Сремац“, Ниш

311. *Ako je a ma koji cijeli broj, tada dokazati da je*

$$a^7 - a = 2S_1(a - 1)(a^4 + a^2 + 1),$$

gdje je S_1 zbroj prirodnih brojeva a.

$$S_1 = \frac{a}{2}(1 + a).$$

Ako to uvrstimo u desnu stranu jednakosti, dobijemo

$$A = 2S_1(a - 1)(a^4 + a^2 + 1) = a(a^2 - 1) \cdot$$
$$\cdot (a^4 + a^2 + 1) = a(a^6 - 1) = a^7 - a$$

Kulišić Petar
svrš. uč. g. Dubrovnik

312. *Zbroj kvadrata dvaju brojeva jednak je 78416, njihov najmanji zajednički višekratnik je 520. Koji su to brojevi?*

Iz zadatka izlazi jednadžba

$$x^2 + y^2 = 78416 \quad (1)$$

Višekratnik 520 može se rastaviti na proste faktore $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 13$.

Prema tome svaki od brojeva x i y može sadržati samo neke ili sve faktore od 520.

Zatim zaključujemo:

I. Samo jedan od brojeva ima faktor 5; inače bi oba svršavala s nulom, ili jedan s nulom, a drugi s 5, što ne može u jednadžbi (1) dati znamenku jedinica 6.

II. Jedan od brojeva mora svršavati s nulom, dok drugi, koji nema faktora 5, mora svršavati sa 4 ili sa 6, i on može biti samo $x_1 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 13$ ili $x_2 = 2 \cdot 13$, (jer tada jednadžba (1) ima na obje strane znamenku jedinica 6).

A sad u (1) uvrstimo $x_1 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 13 = 104$; dobivamo $y_1 = 260$.

Pretpostavka $x_2 = 2 \cdot 13 = 26$ ne zadovoljava.

Prema tome traženi brojevi su 104 i 260; mogu biti i negativni.

Basar Ivan, svrš. uč. g. Karlovac

Napomena uredništva. Zadatak se može i ovako riješiti: ako je najv. zaj. mjera traženih brojeva x i y M, to je $x = M\alpha$, $y = M\beta$ (α i β su rel. prosti). Zato je $520 = M\alpha\beta$ i

$$\frac{x^2+y^2}{x^2y^2} = \frac{M^2(\alpha^2+\beta^2)}{M^2\alpha^2\beta^2} = \frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha^2\beta^2} = \frac{78416}{520^2} = \frac{29}{100}$$

i kako su $\alpha^2 + \beta^2$, $\alpha^2\beta^2$ rel. prosti, jer su α^2 i β^2 rel. prosti, to je $\alpha^2 + \beta^2 = 29$, $\alpha^2\beta^2 = 100$, $\alpha = 5$, $\beta = 2$, $M = 52$, $x = 260$, $y = 104$.

313. *Odrediti ostanek pri deljenju števila* $11^{100} + 13^{200} + 17^{300}$ *s številom* 7.

Trinom delimo z monomom tako da delimo vsak člen trinoma posebej.

11^{100} lahko napišemo $(7 + 4)^{100}$. Če bi ta binom potencirali, bi dobili polinom, katerega vsi članovi razen zadnjega vsebujejo tudi faktor 7 in zato pri delitvi s 7 nimaju ostanka. Le zadnji član tega polinoma ni deljiv s 7, ker je ta član potenca števila 4. Zaradi toga dobimo pri delitvi $11^{100} : 7$ isti ostanek, kot če delimo 4^{100} s 7. Pri delitvi $4^{100} = 16^{50} = (14 + 2)^{50}$ s 7 dobimo isti ostanek kot pri delitvi števila 2^{50} s 7. Podobno sklepamo še dalje: $2^{50} = 32^{10} = (28 + 4)^{10}$, $4^{10} = 16^5 = (14 + 2)^5$, $2^5 = 32 = 28 + 4$. Pri delitvi 32 s 7 dobimo ostanek 4. Če delimo 11^{100} s 7 dobimo ostanek $\underline{4}$.

Na isti način dobimo tudi ostanke pri delitvah $13^{200} : 7$ in $17^{300} : 7$.

$13^{200} = (7 + 6)^{200}$, $6^{200} = 36^{100} = (35 + 1)^{100}$, $1^{100} = 1$, torej je $13^{200} : 7 = a + \underline{1}$ (če je a celo število, ki ga dobimo pri delitvi).

$17^{300} = (14 + 3)^{300}$, $3^{300} = 27^{100} = (21 + 6)^{100}$, $6^{100} = 36^{50} = (35 + 1)^{50}$, $1^{50} = 1$, ostanek je $\underline{1}$.

Če delimo trinom $11^{100} + 13^{200} + 17^{300}$ s 7, dobimo ostanek $4 + 1 + 1 = \underline{6}$.

Maček Vilko, dij. 5. b r. kl. g. Ljubljana

314. *Naći sumu od* $m + n$ *prvih članova aritmetičke progresije, u kojoj je* m*-ti član jednak* n*, a* n*-ti član jednak* m.

Imamo

$$a_m = a_1 + (m-1)\,d = n \qquad a_1 + md - d = n$$
$$a_n = a_1 + (n-1)\,d = m \qquad a_1 + nd - d = m$$

Oduzimanjem dobivamo $d = \dfrac{n-m}{m-n} = -1$.

Dakle je $a_1 = m + n - 1$.

$$a_{m+n} = a_1 + (m+n-1)\,d = m + n - 1 + (m+n-1)\cdot(-1) = 0$$

$$S_{m+n} = \frac{m+n}{2}(a_1 + a_{m+n}) = \frac{1}{2}(m+n)(m+n-1).$$

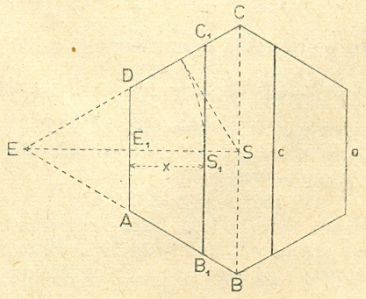
Lojen Miroslav, uč. VII. a r. g. Varaždin

315. *Razdeli pravilen šesterokotnik na 3 enake dele s pomočjo 2 vzporednic s stranico! Reši računsko in konstruktivno!*

Naj bo $E_1S_1 = x$. Potem sledi, ker je $\triangle BEC$ podoben $\triangle EB_1C_1$

$$2a : a\sqrt{3} = c : \left(x + \frac{a\sqrt{3}}{2}\right);$$

$$c = \frac{2x + a\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = a + \frac{2x}{\sqrt{3}}.$$



Ploščina trapeza AB_1C_1D pa je

$$p = \frac{a+c}{2}x = \left(a + \frac{x\sqrt{3}}{3}\right)x.$$

Ker mora biti p enak tretjini ploščine celotnega šesterokotnika, dobimo

$$\left(a + \frac{x\sqrt{3}}{3}\right)x = \frac{a^2}{2}\sqrt{3}$$

$$2x^2\sqrt{3} + 6ax - 3a^2\sqrt{3} = 0.$$

Prema tome svaki od brojeva x i y može sadržati samo neke ili sve faktore od 520.

Zatim zaključujemo:

I. Samo jedan od brojeva ima faktor 5; inače bi oba svršavala s nulom, ili jedan s nulom, a drugi s 5, što ne može u jednadžbi (1) dati znamenku jedinica 6.

II. Jedan od brojeva mora svršavati s nulom, dok drugi, koji nema faktora 5, mora svršavati sa 4 ili sa 6, i on može biti samo $x_1 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 13$ ili $x_2 = 2 \cdot 13$, (jer tada jednadžba (1) ima na obje strane znamenku jedinica 6).

A sad u (1) uvrstimo $x_1 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 13 = 104$; dobivamo $y_1 = 260$.

Pretpostavka $x_2 = 2 \cdot 13 = 26$ ne zadovoljava.

Prema tome traženi brojevi su 104 i 260; mogu biti i negativni.

Basar Ivan, svrš. uč. g. Karlovac

Napomena uredništva. Zadatak se može i ovako riješiti: ako je najv. zaj. mjera traženih brojeva x i y M, to je $x = M\alpha$, $y = M\beta$ (α i β su rel. prosti). Zato je $520 = M\alpha\beta$ i

$$\frac{x^2 + y^2}{x^2 y^2} = \frac{M^2(\alpha^2 + \beta^2)}{M^2 \alpha^2 \beta^2} = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha^2 \beta^2} = \frac{78416}{520^2} = \frac{29}{100}$$

i kako su $\alpha^2 + \beta^2$, $\alpha^2\beta^2$ rel. prosti, jer su α^2 i β^2 rel. prosti, to je $\alpha^2 + \beta^2 = 29$, $\alpha^2\beta^2 = 100$, $\alpha = 5$, $\beta = 2$, $M = 52$, $x = 260$, $y = 104$.

313. *Odrediti ostanek pri deljenju števila* $11^{100} + 13^{200} + 17^{300}$ *s številom* 7.

Trinom delimo z monomom tako da delimo vsak član trinoma posebej.

11^{100} lahko napišemo $(7 + 4)^{100}$. Če bi ta binom potencirali, bi dobili polinom, katerega vsi članovi razen zadnjega vsebujejo tudi faktor 7 in zato pri delitvi s 7 nimajo ostanka. Le zadnji član tega polinoma ni deljiv s 7, ker je ta član potenca števila 4. Zaradi toga dobimo pri delitvi $11^{100} : 7$ isti ostanek, kot če delimo 4^{100} s 7. Pri delitvi $4^{100} = 16^{50} = (14 + 2)^{50}$ s 7 dobimo isti ostanek kot pri delitvi števila 2^{50} s 7. Podobno sklepamo še dalje: $2^{50} = 32^{10} = (28 + 4)^{10}$, $4^{10} = 16^5 = (14 + 2)^5$, $2^5 = 32 = 28 + 4$. Pri delitvi 32 s 7 dobimo ostanek 4. Če delimo 11^{100} s 7 dobimo ostanek $\underline{4}$.

Na isti način dobimo tudi ostanke pri delitvah $13^{200} : 7$ in $17^{300} : 7$.

$13^{200} = (7 + 6)^{200}$, $6^{200} = 36^{100} = (35 + 1)^{100}$, $1^{100} = 1$, torej je $13^{200} : 7 = a + \underline{1}$ (če je a celo število, ki ga dobimo pri delitvi).

$17^{300} = (14 + 3)^{300}$, $3^{300} = 27^{100} = (21 + 6)^{100}$, $6^{100} = 36^{50} = (35 + 1)^{50}$, $1^{50} = 1$, ostanek je $\underline{1}$.

Če delimo trinom $11^{100} + 13^{200} + 17^{300}$ s 7, dobimo ostanek $4 + 1 + 1 = \underline{6}$.

Maček Vilko, dij. 5. b r. kl. g. Ljubljana

314. *Naći sumu od* $m + n$ *prvih članova aritmetičke progresije, u kojoj je* m*-ti član jednak* n*, a* n*-ti član jednak* m.

Imamo

$$a_m = a_1 + (m - 1)\,d = n \qquad a_1 + md - d = n$$
$$a_n = a_1 + (n - 1)\,d = m \qquad a_1 + nd - d = m$$

Oduzimanjem dobivamo $d = \dfrac{n - m}{m - n} = -1$.

Dakle je $a_1 = m + n - 1$.

$$a_{m+n} = a_1 + (m + n - 1)\,d = m + n - 1 + (m + n - 1) \cdot (-1) = 0$$

$$S_{m+n} = \frac{m + n}{2}(a_1 + a_{m+n}) = \frac{1}{2}(m + n)(m + n - 1).$$

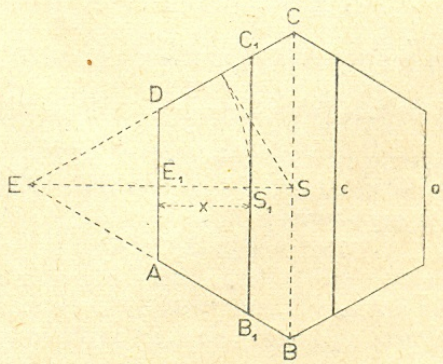
Lojen Miroslav, uč. VII. a r. g. Varaždin

315. *Razdeli pravilen šesterokotnik na 3 enake dele s pomočjo 2 vzporednic s stranico! Reši računsko in konstruktivno!*

Naj bo $E_1S_1 = x$. Potem sledi, ker je $\triangle BEC$ podoben $\triangle EB_1C_1$

$$2a : a\sqrt{3} = c : \left(x + \frac{a\sqrt{3}}{2}\right);$$

$$c = \frac{2x + a\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = a + \frac{2x}{\sqrt{3}}.$$



Ploščina trapeza AB_1C_1D pa je

$$p = \frac{a + c}{2}x = \left(a + \frac{x\sqrt{3}}{3}\right)x.$$

Ker mora biti p enak tretjini ploščine celotnega šesterokotnika, dobimo

$$\left(a + \frac{x\sqrt{3}}{3}\right)x = \frac{a^2}{2}\sqrt{3}$$

$$2x^2\sqrt{3} + 6ax - 3a^2\sqrt{3} = 0.$$

Od koder sledi vrednost za x $(x > 0)$,

$$x = \frac{3 - \sqrt{3}}{2} a$$

Konstruiramo sledeće: Skozi razpolovišče stranice DC šesterokotnika potegnemo lok, ki ima središče v E. Ta seče daljico ES v točki S_1, skozi katero poteka iskana vzporednica.

Lesjak Janez, dij. VI. r. g. Kočevje

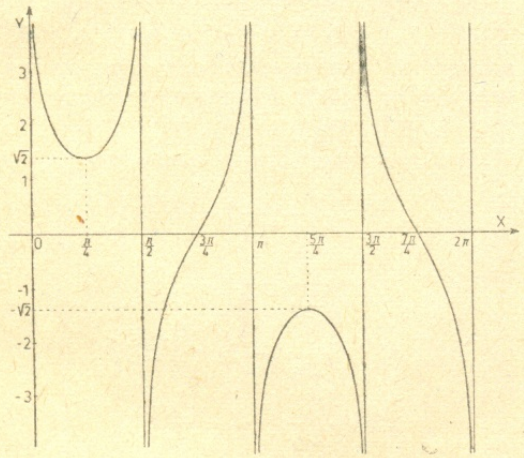
Basar Ivan, svrš. uč. gimn. Karlovac dobiva točku C_1 kao sjecište stranice DC s tangentom upisane kružnice okomitom na BC.

316. *Ispitaj tok funkcije*

$$y = \frac{\sin x + \cos x}{\sin 2x}.$$

Zadana funkcija ima period 2π, pa je dovoljno da je promatramo samo u intervalu $[0, 2\pi]$.

Nazivnik $\sin 2x = 0$ za $x = k\frac{\pi}{2}$ a brojnik je različan od nule, što znači da zadana funk-



cija ima asimptote za svako $x = k\frac{\pi}{2}$. Dalje nalazimo $\lim_{x\to 0} y = +\infty$, za

$x > 0$; $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} y = +\infty$, ako je $x < \frac{\pi}{2}$;

$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} y = -\infty$, za $x > \frac{\pi}{2}$; $\lim_{x\to\pi} y = +\infty$, ako je $x < \pi$; $\lim_{x\to\pi} y = -\infty$ za $x > \pi$; $\lim_{x\to\frac{3\pi}{2}} y = -\infty$, ako je $x < \frac{3\pi}{2}$; $\lim_{x\to\frac{3\pi}{2}} y = +\infty$, ako je $x > \frac{3\pi}{2}$; $\lim_{x\to 2\pi} y = -\infty$ za $x < 2\pi$.

Deriviranjem jednadžbe

$$y = \frac{\sin x + \cos x}{\sin 2x}$$

dobivamo $y' = \sin^3 x - \cos^3 x$, realna su rješenja od $y' = 0$, $x_1 = \frac{\pi}{4}$ i $x_2 = \frac{5\pi}{4}$. Zatim nalazimo da je $y''\left(\frac{\pi}{4}\right) > 0$, dakle funkcija ima u toj točki minimum $\sqrt{2}$; $y''\left(\frac{5\pi}{4}\right) < 0$, što znači da funkcija ovdje ima maksimum; on je jednak $-\sqrt{2}$.

Krivulja siječe x — os u

$$x_1 = \frac{3\pi}{4} \text{ i } x_2 = \frac{7\pi}{4}.$$

Tok funkcije izgleda ovako

x	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$		π		$\frac{5\pi}{4}$		$\frac{3\pi}{2}$		2π
y'		$-$	0	$+$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	$\sqrt{2}$ min.	$\nearrow$	$\pm\infty$	$\nearrow$	$\pm\infty$	$\nearrow$	$-\sqrt{2}$ maks.	$\searrow$	$\mp\infty$	$\searrow$	$-\infty$

Ovo razabiramo i na grafiku same funkcije.

Baličević Ivan
svrš. uč. gimn. Vukovar

317. *Krivulja* $y = \sin x + \sqrt{3}\cos x$ *rotira oko osi* x. *Koliki je obujam rotacionog tijela između* $x = 0$ i $x = \frac{2\pi}{3}$?

$$V = \pi \int_a^b y^2\,dx = \pi \int_0^{\frac{2\pi}{3}} (\sin x + \sqrt{3}\cos x)^2\,dx =$$

$$= \pi \int_0^{\frac{2\pi}{3}} (\sin^2 x + 2\sqrt{3}\sin x\cos x + 3\cos^2 x)\,dx =$$

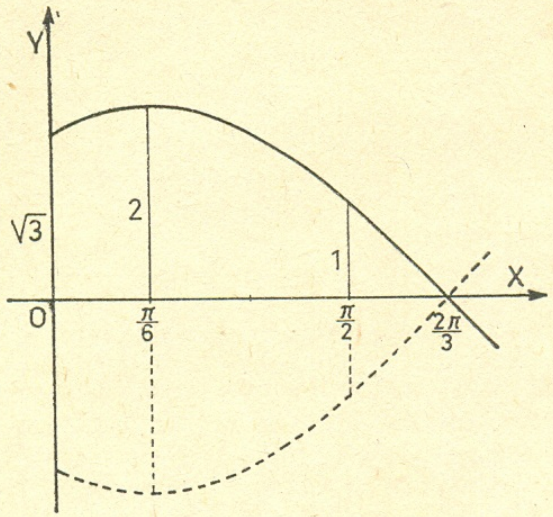
$$= \pi \left| \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x + \frac{3}{2}x + \frac{3}{4}\sin 2x, \right.$$

jer je

$$\int \sin^2 x\,dx = \int \frac{1 - \cos 2x}{2}\,dx,$$

$$\int \cos^2 x\,dx = \int \frac{1 + \cos 2x}{2}\,dx,$$

$$\int \sin x\cos x\,dx = \frac{1}{2}\int \sin 2x\,dx = -\frac{1}{4}\cos 2x,$$



$$V = \pi \Big|_0^{\frac{2\pi}{3}} 2x + \frac{1}{2}\sin 2x - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x =$$

$$= \pi\left(\frac{4\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \pi\left(\frac{4\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

Hendeković Josip, uč. 7. b r. 2. g. Zagreb

318. *U trokutu je zadano:* a, v_a i ρ; *neka se riješi trokut.*

Neka su b i c nepoznate stranice trokuta. Iz formule $P = \rho \cdot s$ dobivamo u ovom slučaju sistem s nepoznanicama b i c

$$\frac{a v_a}{2} = \rho s \qquad (1)$$

$$(s-a)(s-b)(s-c) = \rho^2 s \qquad (2)$$

Ako iz jednadžbe (1) uvrstimo u (2) vrijednosti za

$$s = \frac{a v_a}{2\rho} \text{ i za } c = \frac{a v_a}{\rho} - a - b,$$

dobivamo nakon sređivanja jednadžbu

$$b^2 - b\left(\frac{a v_a}{\rho} - a\right) + \left(\frac{a v_a}{2\rho}\right)^2 - \frac{a^2 v_a}{2\rho} + \frac{\rho^2 v_a}{v_a - 2\rho} = 0$$

iz koje se izračuna

$$b_{1,2} = \frac{1}{2}\left[\frac{a}{\rho}(v_a - \rho) \pm \sqrt{a^2 - \frac{4\rho^2 v_a}{v_a - 2\rho}}\right].$$

Po obliku sistema (1), (2) zaključuje se pak, da je $c_1 = b_2$, $c_2 = b_1$.

Kako ta rješenja trebaju biti realna i pozitivna, to mora biti

$$D \geqq 0, \quad S > 0, \quad P > 0.$$

Iz prvog uvjeta izlazi

$$a^2 - \frac{4\rho^2 v_a}{v_a - 2\rho} \geqq 0,$$

iz drugog $\quad \frac{a}{\rho}(v_a - \rho) > 0,$

treći se uvjet može pisati

$$\frac{v_a[a^2(v_a - 2\rho)^2 + 4\rho^4]}{4\rho^2(v_a - 2\rho)} > 0.$$

Oba posljednja uvjeta ispunjena su za

$$v_a > 2\rho.$$

Zatim se po kosinusovom poučku

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$

(i dalje cikličkom zamjenom) nađu kutovi: α, β i γ. Za kut α dobije se jedno rješenje, dok za β i γ po dva rješenja. ($\beta_1 = \gamma_2$, $\beta_2 = \gamma_1$, jer je $b_1 = c_2$, $b_2 = c_1$). Oba dobivena trokuta su sukladna.

Nadalje se po formuli $r = \frac{abc}{4P}$ dobije samo jedno rješenje za radius opisane kružnice, — i t. d.

Basar Ivan, svrš. uč. g. Karlovac

319. *Ako su zadane jednačine*

$a_1x^2 + b_1x + c_1 = 0$, $a_2x^2 + b_2x + c_2 = 0$,

napiši kvadratnu jednačinu gde je svaki koren odnos između jednog korena prve jednačine i jednog korena druge jednačine.

Neka su korени datih jednačina

$$x_1 = \frac{1}{2a_1}(-b_1 + \sqrt{D_1})$$

$$x_2 = \frac{1}{2a_1}(-b_1 - \sqrt{D_1}) \qquad \text{i}$$

$$x'_1 = \frac{1}{2a_2}(-b_2 + \sqrt{D_2})$$

$$x'_2 = \frac{1}{2a_2}(-b_2 - \sqrt{D_2})$$

gde smo kraćе radi stavili

$$D_1 = b_1^2 - 4a_1c_1 \quad \text{i} \quad D_2 = b_2^2 - 4a_2c_2.$$

Ako korene nove jednačine, na osnovu postavljenog uslova, obeležimo sa

$$y_1 = \frac{x_1}{x_1'} \quad \text{i} \quad y_2 = \frac{x_2}{x_2'},$$

to naimenom poznate Vijet-ove teoreme imamo:

$$p = -\left(\frac{x_1}{x_1'} + \frac{x_2}{x_2'}\right) = -\frac{x_1x_2' + x_2x_1'}{x_1'x_2'}$$

i

$$q = \frac{x_1'x_2'}{x_1 \cdot x_2}.$$

Zamenjujući date vrednosti x_1, x_2 x_1' i x_2' i svođenjem dobijamo

$$p = \frac{-b_1b_2 + \sqrt{D_1D_2}}{2a_1c_2} \quad \text{i} \quad q = \frac{c_1a_2}{a_1 \cdot c_2}.$$

Нова једначина тада има облик

$$y^2 + py + q = 0$$

или

$$y^2 + \frac{\sqrt{D_1 \cdot D_2} - b_1 b_2}{2a_1 c_2} y + \frac{c_1 a_2}{a_1 \cdot c_2} = 0$$

и коначно

$$2a_1 c_2 y^2 + (\sqrt{D_1 D_2} - b_1 b_2)\, y + 2c_1 a_2 = 0.$$

Јевросима Станојевић
ванр. уч. VIII р. ВМГ »С. М.« Ниш

320. *Določi števili m in n tako, da se enačba*

$$x^3 - 81x + 756 = 0 \qquad (1)$$

lahko napiše v obliki

$$\left(\frac{x-m}{x-n}\right)^3 = \frac{m}{n} \qquad (2)$$

in poišči njene korene!

Če enačbo (2) razvijemo in uredimo, dobimo

$$x^3(n-m) - 3mnx\,(n-m) + mn\,(n^2 - m^2) = 0$$

Ker $n \neq m$ lahko enačbo delimo z $n - m$

$$x^3 - 3mnx + mn\,(m+n) = 0.$$

S primerjanjem koeficientov enačbe (1) dobimo

$$-3mn = -81, \quad mn\,(m+n) = 756.$$

Od tu sledi sistem

$$mn = 27$$
$$m + n = 28$$

ki mu pripada enačba

$$z^2 - 28z + 27 = 0$$

katere korena sta $z_1 = 27$ in $z_2 = 1$.

Torej

$$m_1 = 27 \qquad m_2 = 1$$
$$n_1 = 1 \qquad n_2 = 27$$

torej dve rešitvi, ki pa ne vplivajo na korene enačbe (1). Spremeni se pravzaprav nič, ker lahko enačbo (2) samo obrnemo in imamo prvotno. Če vstavimo

$$y = \frac{x-27}{x-1} \text{ dobimo } y^3 - 27 = 0$$

ker da:

$$y_1 = 3, \; y_{2,3} = \frac{3}{2}(-1 \mp \sqrt{3})$$

oziroma $x_1 = -12$,

$$x_{2,3} = \frac{57 \pm 3i\sqrt{3}}{5 \pm 3i\sqrt{3}} = 6 \mp 3i\sqrt{3}.$$

Janez Lesjak
dij VI. r. gimn. Kočevje

Riješili zadatke iz 4. broja

Bajtarević Ahmed, 8. r. gimn. Visoko, 309, 310, 311, 312, 313, 319, 320; *Baličević Ivan*, svrš. uč. g. Vinkovci, sve zadatke 308—320; *Basar Ivan*, svrš. uč. gimn. Karlovac, sve zadatke 308—320; *Dimić Aleksandar*, 7_2 raz. g. »St. Sremac«, Niš, 308, 309, 319; *Dvizac Menail*, II Am Mostar, 309, 311, 312, 314, 318, 319; *Grujić V. Petar*, 7 raz. 1 g. Kragujevac, 308, 309; *Hendeković Josip*, 7. b r. 2. gimn. Zagreb, 309, 310, 311, 312, 313, 314, 316, 317, 318, 319, 320; *Kulišić Petar*, svrš. uč. g. Dubrovnik, 308, 309, 310, 311, 312, 313, 314, 316, 317, 318, 319, 320; *Lesjak Janez*, 6. r. gimn. Kočevje, 311, 313, 314, 315, 316, 317, 318, 320; *Lojen Miroslav*, 7. a r. g. Varaždin, 314, 320; *Maček Vilko*, 5. b r. kl. g. Ljubljana, 308, 311, 312, 313, 315; *Pajk Milan*, 5. r. 1. gimn. Ljubljana, 308; *Rind Ištvan*, 7. raz. g. Subotica, 309, 312, 316, 318, 320; *Stanojević Jevrosima*, vanr. uč. gimn. »St. Marković« Niš, 308, 309, 311, 314, 318, 319, 320; *Suljagić Salih*, 6. r. gimn. »B. Ogrizović« Zagreb, 315, 319, 320; *Šinkovec Dea*, 7. b r. 1. g. Zagreb, 308, 315, 316, 317; *Vračarić Mirjana*, 7_4 raz. g. Sombor, 308, 309, 312, 318, 319; *Анђић Александар*, 8 раз. г. Трстеник, 308, 309, 312; *Богданов Лазар*, 5_2 р. 1. београ. гимн. 308; *Божиновић Севдалина*, 8_3 раз. 2 гимн. Крагујевац, 309, 314, 320; *Војиновић Раденко*, сврш. уч. газ. Пљевља, 311, 316; *Јеремић Биљана*, 6_4 р. г. »С. М.« Ниш, 308, 309, 310, 311, 312, 314, 315, 319, 320; *Јеремић Ђурђе*, 6_3 р. г. »Св. Марк.« Ниш, 308, 309, 310, 311, 314, 318, 319; *Јовановић Добривоје*, 7_2 раз. г. »Ст. Сремац« Ниш, 308, 309, 311, 315; *Кирић Миодраг*, 7в р. 2 г. Зрењанин, 308, 310, 311, 312, 313, 315, 318; *Лешић Милан*, 7е р. г. »М. Пијаде« Суботица, 309, 312, 320; *Најдова Душанка*, 5 кл. г. »Ј. Б. Тито« Битола, 308; *Наум Срдиновски*, 8 кл. г. »Ј. Б. Тито« Битола, 309, 311; *Обрадовић Зорица*, 5 с раз. г. Вршац, 308; *Павловић Владан*, 8 р. г. Светозарево, 308, 318, 320; *Радовановић Нинослав*, 7_2 р. г. »Ст. Сремац« Ниш, 308, 309, 311, 312, 318; *Ранковић Борко*, сврш. уч. г. Књажевац, 308, 309, 311; *Стојаковић Зоран*, 5 с р. г. »Св. Марковић« Нови Сад, 308, 315; *Шћепановић Радован*, сврш. уч. г. Пљевље, 308, 309, 311, 312, 314 (дјелом.).

Pravodobno stigla rješenja iz 3. broja

Emrić Enver, 8. r. gimn. Visoko, 294, 296, 297, 304; *Jamičić Vlatko*, 8. b raz. g. Našice, 294, 296, 299, 303, 306; *Mesihović Behđed*,

6_3 r. g. Mostar, 294, 296, 302, 303; *Маринова Викторија*, 8 кл. г. »Ј. Б. Тито« Битола, 296, 297, 299; *Радовановић Нинослав*, 7_2 раз. гимн. »Ст. Сремац« Ниш, 294, 296.

D) Rješenja zadataka iz fizike

156. Neka se odredi vrijeme t ekspozicije fotografiranja iz slike kuglice, koja slobodno pada pred centimetarskom skalom. Kuglica je puštena kod znaka 0, a na fotografiji se slika kuglice razvukla od znaka $n_1 = 4$, do znaka $n_2 = 16$ cm.

Da kuglica padne od znaka 0 do znaka n_1 proteče vrijeme $t_1 = \sqrt{\frac{2}{g} n_1}$, a da padne od znaka 0 do znaka n_2 proteče vrijeme $t_2 = \sqrt{\frac{2}{g}\, n_2}$. Interval vremena, dok kuglica pada od znaka n_1 do znaka n_2, a to je baš traženo vrijeme ekspozicije t, je

$$t = t_2 - t_1 = \sqrt{\frac{2}{g}} \left(\sqrt{n_1} - \sqrt{n_2}\right) =$$

$$= \sqrt{\frac{2}{981}} \left(\sqrt{16} - \sqrt{4}\right) = \underline{0{,}090 \text{ s}}.$$

157. Masa Mjeseca iznosi 1/80 mase Zemlje, a polumjer Mjeseca je 1/4 polumjera Zemlje. Koliko bi skočio u vis na Mjesecu čovjek, koji na Zemlji skoči 1,8 metara?

Iz Newtonovog zakona gravitacije sila F_2, kojom Zemlja na svojoj površini privlači masu m je

$$F_z = k \frac{M_z \cdot m}{r_z^2},$$

gdje je k konstanta gravitacije, M_z masa Zemlje, a r_z polumjer Zemlje. Sila F_m, kojom Mjesec privlači masu m na svojoj površini je

$$F_m = k \frac{M_m \cdot m}{r_m^2},$$

gdje je M_m masa Mjeseca, a r_m polumjer Mjeseca.

Budući da je $M_m = \frac{M_z}{80}$, a $r_m = \frac{r_z}{4}$ izlazi:

$$F_z : F_m = k \frac{M_z \cdot m}{r_z^2} : k \frac{M_z/80 \cdot m}{(r_z/4)^2},$$

t. j. $F_z : F_m = 5 : 1$.

Dakle, privlačna sila na površini Mjeseca je pet puta manja, nego na površini Zemlje, pa će čovjek, koji na Zemlji može skočiti u vis 1,8 m, moći će na Mjesecu skočiti $5 \cdot 1{,}8 = \underline{9 \text{ m}}$ u vis.

158. Električni generator daje napon od 230 V. Otpor žice, koje dovode i odvode struju do niza paralelno spojenih žarulja iznosi 1 Ω. Neka se nađe najveći broj žarulja, koje će dobro svijetliti u tom krugu, ako svaka žarulja treba 0,5 A pri naponu od 220 V, a loše sja, ako je napon niži.

Pad napona na dovodnim žicama mora biti najviše 230 V — 220 V = 10 V. Ohmov zakon $V = R \cdot i$ u našem slučaju glasi $10 = 1 \cdot 0{,}5\, n$, gdje je n broj žarulja. Iz gornje jednadžbe izlazi

$$\underline{n = 20 \text{ žarulja}}.$$

159. Na istoj osovini rade električni motor i generator. Zadan je koeficijent iskorištenja motora, a instrumenti uređaja omogućuju mjerenje snage, koju motor uzima iz gradske mreže i snage, koju generator daje potrošaču. Kolikî je koeficijent iskorištenja generatora?

Snaga, koju uzima motor iz gradske mreže je P_1, a snaga, koju daje generatoru je P'. Koeficijent iskorištenja motora je prema tome

$$\eta_1 = P'/P_1 \qquad (1)$$

Generator prima od motora snagu P', a daje potrošaču P_2, pa je koeficijent iskorištenja generatora

$$\eta_2 = P_2/P' \qquad (2)$$

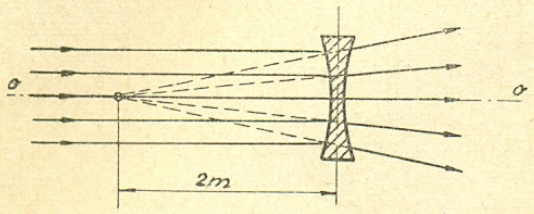
Iz jednadžbe (1) i (2) izlazi da je koeficijent iskorištenja generatora:

$$\eta_2 = \frac{P_2}{\eta_1 P_1}.$$

160. Kratkovidna osoba ne može jasno vidjeti predmet koji je dalje od 2 m. Kolika mora biti žarišna daljina leće naočala, da bi vidjela jasno dalek predmet?

Leća naočala treba biti takva, da gledajući kroz nju, zrake, koje dolaze od neizmjerno dalekog predmeta, t. j. zrake, koje idu paralelno s optičkom osi, pro-

lazom kroz leću, idu divergentno tako, kao da su došle iz točke, koja je 2 m ispred teće, t. j. gledajući leću, izgleda kao da je neizmjerno udaljen predmet



2 m ispred leće. Dakle, naša kratkovidna osoba mora upotrebiti divergentnu (negativnu) leću, čija je žarišna daljina 2 m ili u dioptrijama: $d = -\frac{1}{2} = -0{,}5$ dioptrija.

Riješili zadatke iz 4. broja

Bajtarević Ahmed, 8. r. g. Visoko, 156 (djel.), 157, 158, 159, 160; *Baličević Ivan*, svrš. uč. g. Vukovar, 156, 157, 158, 159, 160; *Basar Ivan*, svrš. uč. gimn. Karlovac, 156, 157, 158, 159, 160; *Dvizac Menail*, 2. a r. STŠ Mostar, 156, 159; *Gros Mladen*, 7a r. kl. g. Ljubljana, 156, 157, 158, 159, 160; *Grujić V. Petar*, 7. r. g. Kragujevac, 156, 157; *Hendeković Josip*, 7. b r. 2. gimn. Zagreb, 156, 157, 158, 159; *Kocijan Josip*, 6. a raz. gimn. Varaždin, 158; *Kulišić Petar*, svrš. uč. g. Dubrovnik, 156, 157, 158, 159; *Lesjak Janez*, 6a r. g. Kočevje, 156, 157, 158, 159; *Niseteo Vera*, 7. c r. g. »Vl. Nazor« Split, 157, 158; *Rind Ištvan*, 7. r. g. Bačka Topola, 157; *Rojnec Jernej*, 7. b r. gimn. Murska Sobota, 156, 157, 160 (djel.); *Suljagić Salih*, 6. r. g. »B. Ogrizović« Zagreb, 156 (djel.), 157; *Анђић Александар*, 7_1 р. г. Трстеник, 156, 157, 160; *Богданов Лазар*, 5_2 р. 1 г. Београд, 156; *Војновић Раденко*, сврш. уч. г. Пљевље, 157; *Јеремић Биљана*, 7_4 р. г. »Св. Марк.« Ниш, 156 (дел), 157 (дел); *Лешић Милан*, 7с р. г »М. Пијаде« Суботица, 156, 157; *Радовановић Ниослав*, 7_3 р. г. »Ст. Сремац« Ниш, 157.

Riješili zadatke iz 3. broja

Jamičić Vlatko, 8. r. gimn. Našice, 151, 152; *Mesihović Behded*, 6_3 r. g. Mostar, 151, 152, 155.

Vježbe za učenike viših razreda gimnazije

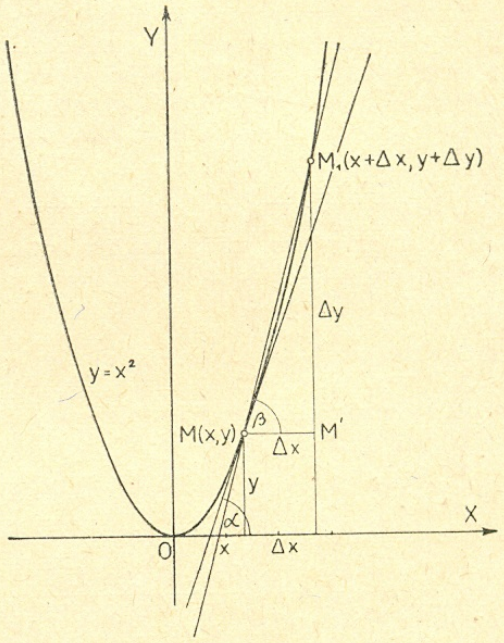
Prvi elementi infinitezimalnog računa

U našim zadacima dolaze između ostalih i jednostavni zadaci iz infinitezimalnog računa, koji je propisan u NRH. Da bi i učenici i iz ostalih republika mogli sudjelovati u rješavanju takvih zadataka, donosimo u vrlo sažetoj i najkraćoj formi neke osnovne poučke iz tog računa. Pri tom pretpostavljamo da su na pr. pojam neprekidnosti funkcija i pojam granice učenicima već donekle poznati.

1. Pojam derivacije

Problem tangente. Razmatrajmo krivulju $y = x^2$ i postavimo si za zadatak, da u kojojgod točki $M(x, y)$ te krivulje odredimo jednadžbu tangente na tu krivulju.

Kako nam je točka $M(x, y)$ zadana, znamo, da uzmognemo odrediti jednadžbu tangente, da nam treba poznavati njezin koeficijent smjera $tg\,\alpha$. Pokazat ćemo, kako se on može izračunati.



Sl. 1.

Istaknimo susjednu točku M_1, koja ima apscisu $x + \Delta x$ (Δx je znak za prirast od x, on se kadšto označuje također naprosto s h). Koji je koeficijent smjera sekante MM_1? Iz slike razabiramo da je

$$tg\,\beta = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(x + \Delta x)^2 - x^2}{\Delta x}.$$

Da imamo drugu koju krivulju $y = f(x)$, gdje $f(x)$ znači neprekidnu funkciju u razmatranom intervalu, koeficijent smjera sekante bio bi općenito

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Ali mi hoćemo znati koeficijent smjera *tangente* u M. U tu svrhu zamislimo, da se točka M_1 ostajući na krivulji sve više i više približava točki M; sekanta MM_1 okretat će se pri tom oko točke M. Nastavimo to okretanje, dok točka M_1 ne padne u M. U tom slučaju sekanta poprima novi posve određeni položaj, ona je tangenta krivulje u M; kažemo, da je tangenta granični položaj sekante MM_1, kad se točka M_1 približava po krivulji točki M dok ne padne u nju. Na temelju rečenog možemo sad odrediti koeficijent smjera tangente na krivulju $y = x^2$. Imali smo

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(x+\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} = \frac{x^2 + 2x\,\Delta x + \Delta x^2 - x^2}{\Delta x} =$$
$$= \frac{2x\,\Delta x + \Delta x^2}{\Delta x} = 2x + \Delta x.$$

Potražimo granicu tog izraza kad $\Delta x \to 0$; ta je granica očito $2x$, dakle je to koeficijent smjera tangente u točki $M(x, y)$ krivulje $y = x^2$. U točki $M(2, 4)$ bit će koeficijent smjera $2x = 2 \cdot 2 = 4$, a jednadžba će tangente glasiti

$$y - 4 = 4(x - 2) \quad \text{ili} \quad y = 4x - 4.$$

Broj 4 jest prema tomu tangens kuta, što ga tangenta u točki $M(2, 4)$ određuje s pozitivnim smjerom osi x.

Granica od $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, kad $\Delta x \to 0$ ili $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ zove se *derivacija ili izvod funkcije* $y = f(x)$ u točki x; ona se označuje s y' ili sa $f'(x)$ ili sa $\frac{dy}{dx}$ (čitaj derivacija od y po x ili dy kroz dx) te je prema definiciji

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} =$$
$$= f'(x) = \frac{dy}{dx} = tg\,\alpha.$$

Kod određivanja derivacije neke funkcije u svakoj točki x nekog intervala $[a; b]$ moramo pretpostaviti, da je funkcija neprekidna u tom intervalu. Funkcija je neprekidna u točki x, ako za $\Delta x \to 0$, i $\Delta y \to 0$ ili jednostavnije rečeno, kad se y vrlo malo mijenja, ako se x vrlo malo mijenja. Funkcija je neprekidna u intervalu $[a; b]$, ako je neprekidna u svakoj točki tog intervala. Neprekidne su funkcije na pr. $y = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$, $y = \sin x$, $y = \cos x$ za svako x; $y = tg\,x$ za svako x izuzevši $x = (2k+1)\frac{\pi}{2}$, $y = \frac{1}{x}$ za svako x izuzevši $x = 0$, $y = \frac{x^2+x+1}{x^2-6x+8}$ za svako x izuzevši za $x_1 = 2$, $x_2 = 4$.

Da se uzmogne načiniti derivacija neke neprekidne funkcije, potrebno je načiniti ovo: α) *varijabli x dati prirast* Δx, β) *izračunati korespondentni prirast funkcije*, γ) *odrediti količnik između prirasta funkcije i prirasta varijable* Δx, δ) *odrediti granicu tog količnika, kad* $\Delta x \to 0$.

Možemo spomenuti, da ima i neprekidnih funkcija, koje u nekim točkama nemaju derivacije.

Ako neprekidna funkcija ima u nekoj točki derivaciju, kažemo, da je ona u toj točki *derivabilna*. Funkcija je derivabilna u cijelom intervalu $[a, b]$, ako je derivabilna za svako x toga intervala.

2. Derivacije nekih jednostavnih funkcija

Ako je $y = x^3$, dajmo varijabli x prirast Δx, imamo $y + \Delta y = (x + \Delta x)^3 = x^3 + 3x^2\,\Delta x + 3x\,\Delta x^2 + \Delta x^3$, $\Delta y = 3x^2\,\Delta x + 3x\,\Delta x^2 + \Delta x^3$, $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 3x^2 + 3x\,\Delta x + \Delta x^2$; kad $\Delta x \to 0$, posljednja 2 pribrojnika $\to 0$, pa je $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = y' = 3x^2$. *Ako je* $y = x^4$ nalazi se sasvim slično $y' = 4x^3$. *Ako je općenito* $y = x^n$ (n prirodan), y' se nalazi lako pomoću binomnog poučka, $y' = nx^{n-1}$; tako je na pr. za $y = x^9$, $y' = 9x^8$.

Derivacija konstante. Ako je $y = a$, i ako x naraste za Δx, $y + \Delta y$ opet je a, dakle je $\Delta y = 0$ i $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 0$ i $y' = 0$ t. j. *derivacija konstante jednaka je nuli.*

Derivacija zbroja 2 funkcija. Neka je $y = u + v$, gdje su u i v derivabilne funkcije od x; ako x naraste za Δx, u naraste za Δu, v za Δv, y za Δy pa imamo

$$y + \Delta y = u + \Delta u + v + \Delta v,$$

$$\Delta y = \Delta u + \Delta v, \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta v}{\Delta x} \text{ i } y' = u' + v'.$$

Derivacija zbroja 2 funkcija jednaka je zbroju derivacija tih funkcija.

Na pr. ako je $y = x^5 + x^4$, $y' = 5x^4 + 4x^3$.

Da imamo drugu koju krivulju $y = f(x)$, gdje $f(x)$ znači neprekidnu funkciju u razmatranom intervalu, koeficijent smjera sekante bio bi općenito

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Ali mi hoćemo znati koeficijent smjera *tangente* u M. U tu svrhu zamislimo, da se točka M_1 ostajući na krivulji sve više i više približava točki M; sekanta MM_1 okretat će se pri tom oko točke M. Nastavimo to okretanje, dok točka M_1 ne padne u M. U tom slučaju sekanta poprima novi posve određeni položaj, ona je tangenta krivulje u M; kažemo, da je tangenta granični položaj sekante MM_1, kad se točka M_1 približava po krivulji točki M dok ne padne u nju. Na temelju rečenog možemo sad odrediti koeficijent smjera tangente na krivulju $y = x^2$. Imali smo

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(x+\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} = \frac{x^2 + 2x\,\Delta x + \Delta x^2 - x^2}{\Delta x} =$$

$$= \frac{2x\,\Delta x + \Delta x^2}{\Delta x} = 2x + \Delta x.$$

Potražimo granicu tog izraza kad $\Delta x \to 0$; ta je granica očito $2x$, dakle je to koeficijent smjera tangente u točki $M(x, y)$ krivulje $y = x^2$. U točki $M(2, 4)$ bit će koeficijent smjera $2x = 2 \cdot 2 = 4$, a jednadžba će tangente glasiti

$$y - 4 = 4(x - 2) \quad \text{ili} \quad y = 4x - 4.$$

Broj 4 jest prema tomu tangens kuta, što ga tangenta u točki $M(2, 4)$ određuje s pozitivnim smjerom osi x.

Granica od $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, kad $\Delta x \to 0$ ili $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ zove se *derivacija ili izvod funkcije* $y = f(x)$ u točki x; ona se označuje s y' ili sa $f'(x)$ ili sa $\frac{dy}{dx}$ (čitaj derivacija od y po x ili dy kroz dx) te je prema definiciji

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} =$$

$$= f'(x) = \frac{dy}{dx} = tg\,\alpha.$$

Kod određivanja derivacije neke funkcije u svakoj točki x nekog intervala $[a; b]$ moramo pretpostaviti, da je funkcija neprekidna u tom intervalu. Funkcija je neprekidna u točki x, ako za $\Delta x \to 0$, i $\Delta y \to 0$ ili jednostavnije rečeno, kad se y vrlo malo mijenja, ako se x vrlo malo mijenja. Funkcija je neprekidna u intervalu $[a; b]$, ako je neprekidna u svakoj točki tog intervala. Neprekidne su funkcije na pr. $y = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$, $y = \sin x$, $y = \cos x$ za svako x; $y = tg\,x$ za svako x izuzevši $x = (2k+1)\frac{\pi}{2}$, $y = \frac{1}{x}$ za svako x izuzevši $x = 0$, $y = \frac{x^2+x+1}{x^2-6x+8}$ za svako x izuzevši za $x_1 = 2$, $x_2 = 4$.

Da se uzmogne načiniti derivacija neke neprekidne funkcije, potrebno je načiniti ovo: α) *varijabli x dati prirast Δx*, β) *izračunati korespondentni prirast funkcije*, γ) *odrediti količnik između prirasta funkcije i prirasta varijable Δx*, δ) *odrediti granicu tog količnika, kad $\Delta x \to 0$.*

Možemo spomenuti, da ima i neprekidnih funkcija, koje u nekim točkama nemaju derivacije.

Ako neprekidna funkcija ima u nekoj točki derivaciju, kažemo, da je ona u toj točki *derivabilna*. Funkcija je derivabilna u cijelom intervalu $[a, b]$, ako je derivabilna za svako x toga intervala.

2. Derivacije nekih jednostavnih funkcija

Ako je $y = x^3$, dajmo varijabli x prirast Δx, imamo $y + \Delta y = (x + \Delta x)^3 = x^3 + 3x^2\,\Delta x + 3x\,\Delta x^2 + \Delta x^3$, $\Delta y = 3x^2\,\Delta x + 3x\,\Delta x^2 + \Delta x^3$, $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 3x^2 + 3x\,\Delta x + \Delta x^2$; kad $\Delta x \to 0$, posljednja 2 pribrojnika $\to 0$, pa je $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = y' = 3x^2$. *Ako je* $y = x^4$ nalazi se sasvim slično $y' = 4x^3$. *Ako je općenito* $y = x^n$ (n prirodan), y' se nalazi lako pomoću binomnog poučka, $y' = nx^{n-1}$; tako je na pr. za $y = x^9$, $y' = 9x^8$.

Derivacija konstante. Ako je $y = a$, i ako x naraste za Δx, $y + \Delta y$ opet je a, dakle je $\Delta y = 0$ i $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 0$ i $y' = 0$ t. j. *derivacija konstante jednaka je nuli.*

Derivacija zbroja 2 funkcija. Neka je $y = u + v$, gdje su u i v derivabilne funkcije od x; ako x naraste za Δx, u naraste za Δu, v za Δv, y za Δy pa imamo

$$y + \Delta y = u + \Delta u + v + \Delta v,$$

$$\Delta y = \Delta u + \Delta v, \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta v}{\Delta x} \text{ i } y' = u' + v'.$$

Derivacija zbroja 2 funkcija jednaka je zbroju derivacija tih funkcija.

Na pr. ako je $y = x^5 + x^4$, $y' = 5x^4 + 4x^3$.

Derivacija umnoška 2 funkcija. Neka je $y = uv$, gdje su u i v derivabilne funkcije od x. Ako varijabli x dademo prirast Δx, prirast od u je Δu, od v, Δv, od y, Δy, pa je $y + \Delta u = (u + \Delta u)(v + \Delta v) = uv + v\Delta u + u\Delta v + \Delta u \Delta v$; odatle izlazi

$$\Delta y = v\Delta u + u\Delta v + \Delta u \Delta v,$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = v\frac{\Delta u}{\Delta x} + u\frac{\Delta v}{\Delta x} + \frac{\Delta u}{\Delta x}\Delta v.$$

Kad $\Delta x \to 0$, prirasti Δu, Δv i Δy konvergiraju također prema nuli, te imamo redom

$$\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x} = u', \quad \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x} = v', \quad \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}\cdot\Delta v = u' \cdot 0 = 0.$$

Zato je, ako je $y = uv$, $y' = u'v + v'u$.

Specijalni slučaj: ako je $y = au$, gdje je a konstanta, to je $y' = au' + ua'$, ali kako je $a' = 0$, to je $y' = au'$, t. j.

Derivacija umnoška od konstante i funkcije jednaka je umnošku konstante i derivacije funkcije.

Primjer 1. Ako je $y = (x^3 + 2x^2 + 4)(x^2 + 4)$, to je $y' = (x^3 + 2x^2 + 4)2x + (x^2 + 4)(3x^2 + 4x) = 5x^4 + 8x^3 + 12x^2 + 24x$.

Primjer 2. Ako je $y = 5x^4$, $y' = 20x^3$.

Derivacija količnika. Ako je $y = \frac{u}{v}$ (gdje su u i v derivabilne funkcije od x), funkcija y je derivabilna za svako x, koje ne poništava nazivnik. Potražimo derivaciju od y za svaku takovu vrijednost od x. Dajmo varijabli x prirast Δx, i ako su Δu, Δv korespondentni prirasti od u i v, to je $y + \Delta y = \frac{u + \Delta u}{v + \Delta v}$

$$\Delta y = \frac{u + \Delta u}{v + \Delta v} - \frac{u}{v} = \frac{v\Delta u - u\Delta v}{v(v + \Delta v)}.$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{v\frac{\Delta u}{\Delta x} - u\frac{\Delta v}{\Delta x}}{v^2 + v\Delta v}, \text{ i za } \Delta x \to 0,$$

$$y' = \frac{vu' - uv'}{v^2}; \text{ napose, kad je } y = \frac{a}{v},$$

$$y' = -\frac{av'}{v^2}.$$

Primjer 1. Neka se izračuna derivacija od $y = \frac{x^3 + 2x^2 + 3}{x^2 - 1}$. Imamo:

$$y' = \frac{(x^2 - 1)(3x^2 + 4x) - (x^3 + 2x^2 + 3)2x}{(x^2 - 1)^2} = \frac{x(x^3 - 3x - 10)}{(x^2 - 1)^2}.$$

Primjer 2. $y = x^{-n} = \frac{1}{x^n}$

$$y' = -\frac{nx^{n-1}}{x^{2n}} = -nx^{-n-1}.$$

Derivacija funkcije od funkcije. Ako je $y = f(u)$ a u funkcija od x t. j. $u = \varphi(x)$, (f i φ su derivabilne funkcije od u odnosno od x) y je funkcija od funkcije od x. Na pr. ako je $y = (x^2 + 4x + 3)^4$, možemo staviti, $x^2 + 4x + 3 = u$, $y = u^4$.

Imamo identičku jednakost

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x},$$

ovdje je Δx prirast nezavisne varijable, Δu i Δy su pripadni prirasti funkcija u i y. Ako $\Delta x \to 0$, u isti čas i $\Delta u \to 0$, $\Delta y \to 0$, jednakost je uvijek ispunjena, ona vrijedi i na granici. Granica od $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ je y'_x, granica od $\frac{\Delta y}{\Delta u}$ je y'_u, granica od $\frac{\Delta u}{\Delta x}$ je u'_x. Tako je

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x.$$

Primjer 1. Ako je $y = (x^2 + 4x + 3)^4$, stavimo $x^2 + 4x + 3 = u$, imamo $y = u^4$, $f'(u) = 4u^3$, $u'_x = 2x + 4$, pa je $y' = 4u^3(2x + 4) = 4(x^2 + 4x + 3)^3(2x + 4)$. Obično ne pišemo posredne funkcije ni njezine derivacije, već direktno prelazimo na derivaciju po x.

Primjer 2. Neka je $y = \sqrt[q]{x^p} = x^{\frac{p}{q}}$. Imamo $y^q = x^p$, derivirajmo po x imamo $qy^{q-1} \cdot y' = px^{p-1}$ i odatle

$$y' = \frac{p}{q}x^{p-1}\left(x^{\frac{p}{q}}\right)^{q-1} = \frac{p}{q}x^{\frac{p}{q}-1}.$$

Treba li dakle načiniti derivaciju korijena, napišemo ga u obliku potencije i derivirajmo po pravilu za derivaciju potencije:

Primjer 3. $y = \sqrt[5]{x^4}$, $y = x^{\frac{4}{5}}$,

$$y' = \frac{4}{5}x^{-\frac{1}{5}} = \frac{4}{5\sqrt[5]{x}}.$$

Napose je, ako je $y = \sqrt{x}$, $y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

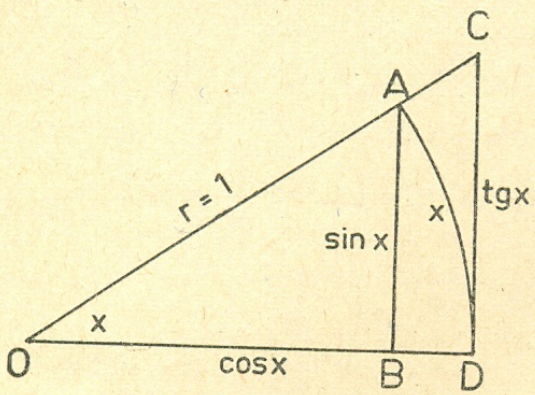
Primjer 4. Načini derivaciju od $y = \sqrt{\frac{1-x^2}{1+x^2}}$.

Imamo

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{\frac{1-x^2}{1+x^2}}}\cdot\frac{(1+x^2)(-2x) - (1-x^2)2x}{(1+x^2)^2} = \frac{-2x}{(1+x^2)\sqrt{1-x^4}}.$$

Derivacije trigonometrijskih funkcija. Da uzmognemo odrediti derivaciju funkcije $\sin x$, treba da poznamo $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$. U tu svrhu nacrtajmo luk DA kruga središta O, polumjera 1. Neka je $AB \perp OD$, $CD \perp OD$, x je mjerni broj luka DA (a i središnjeg kuta DOA u radijanima). Ako taj luk leži između 0 i $\frac{\pi}{2}$, imamo nejednakost

$$OAB < \text{isj. } OAD < OCD \quad \text{ili}$$
$$\frac{1}{2}\sin x \cos x < \frac{x}{2} < \frac{1}{2} tg\, x.$$



Sl. 2.

Podijelimo li tu nejednakost s

$$\frac{1}{2}\sin x \ (\sin x > 0), \quad \text{izlazi}$$
$$\cos x < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}.$$

Kad $x \to 0$, $\cos x$ i $\frac{1}{\cos x} \to 1$, dakle $\frac{x}{\sin x}$ nalazi se između 2 broja, kojih je granica 1; to je samo tako moguće da se $\frac{x}{\sin x}$ a i $\frac{\sin x}{x}$ približavaju granici 1 za $x \to 0$. Omjer $\frac{\sin x}{x} \to 1$ i kad $x \to 0$ neg. vrijednostima.

Derivacija funkcije $y = \sin x$. Imamo

$$y + \Delta y = \sin(x + \Delta x),$$
$$\Delta y = \sin(x + \Delta x) - \sin x =$$
$$= 2\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)\sin\frac{\Delta x}{2}; \text{ zato je}$$
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}};$$

drugi faktor za $\Delta x \to 0$ teži prema 1, prvi faktor prema $\cos x$ pa je $y' = \cos x$.

Derivacija funkcije $y = \cos x$. Za $y = \cos x$ imamo $y = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$,

$$y' = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)(-1) = -\sin x.$$

Derivacija funkcije $y = tg\, x$ i $y = ctg\, x$. Imamo

$$y = tg\, x = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad y' = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Za $y = ctg\, x$ imamo $y = tg\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$,

$$y' = \frac{1}{\cos^2\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}(-1) = \frac{-1}{\sin^2 x}.$$

Primjer 1. Načini derivaciju od $y = \sin^3 x$. Imamo $y' = 3\sin^2 x \cos x$.

Primjer 2. Načini derivaciju od

$$y = \sin x(\sin x - \cos x),$$
$$y' = \sin x(\cos x + \sin x) + \cos x(\sin x - \cos x) =$$
$$= \sin 2x - \cos 2x.$$

3. Zadaci

Za vježbanje načini derivacije ovih funkcija i usporedi rezultate.

1. $y = (x^2 - 6)(2x + 3)^2$,
   $y' = 2(2x + 3)(4x^2 + 3x - 12)$.
2. $y = \frac{x^2 - 6x + 8}{x^2 - 2x + 1}$, $y' = \frac{2(2x - 5)}{(x - 1)^3}$.
3. $y = \frac{x^3 + 1}{x^3 + 3x - 2}$, $y' = \frac{3(2x^3 - 3x^2 - 1)}{(x^3 + 3x - 2)^2}$.
4. $y = \sqrt{\frac{1 - x}{1 + x}}$, $y' = \frac{\sqrt{1 - x^2}}{(x + 1)^2(x - 1)}$.
5. $y = \frac{1}{3} tg^3 x + tg\, x$, $y' = \frac{1}{\cos^4 x}$.
6. $y = \sin x - \frac{1}{3}\sin^3 x$, $y' = \cos^3 x$.
7. $y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x$, $y' = -\sin^2 x$.
8. $y = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x$, $y' = -\cos^2 x$.
9. $y = \cos^2 x - \sin x \cos x - 1$,
   $y' = -(\cos 2x + \sin 2x)$.
10. $y = \sqrt{\frac{1 - \sin x}{1 + \sin x}}$, $y' = -\frac{1}{1 + \sin x}$.
11. $y = \frac{2}{3} tg^3\frac{x}{2} - 2tg\frac{x}{2} + x$, $y' = tg^4\frac{x}{2}$.
12. $y = -\frac{3}{5} ctg^5\frac{x}{3} + ctg^3\frac{x}{3} - 3\, ctg\frac{x}{3} - x$,
    $y' = ctg^6\frac{x}{3}$.

U svakoj točki x, gdje su ove funkcije derivabilne, naučili smo dakle odrediti jednadžbu tangente.

Vježbe iz matematike za učenike 8. razreda 8-god. škole

1. Izračunaj:

$$A = \left[\frac{\left(8-2\frac{3}{4}\right):0{,}0105}{\left(2\frac{4}{5}-2\frac{8}{15}\right)3:\frac{1}{10}} - \frac{(0{,}4+0{,}2)\frac{3}{8}}{(1{,}6+0{,}4)\frac{1}{4}}\right] : \frac{17}{20} + 17{,}28 : 0{,}64.$$

Prvi je razlomak u zagradi jednak $500 : 8 = \frac{125}{2}$, drugi je $0{,}45 = \frac{9}{20}$; zato je izraz u zagradi jednak

$$\frac{125}{2} - \frac{9}{20} = \frac{1241}{20}; \quad \frac{1241}{20} : \frac{17}{20} = 73;$$

posljednji je kvocijent jednak 27, pa je $A = 100$.

2. $$A = \frac{4\sqrt[3]{5+\frac{4}{9}} : \frac{2}{3}\sqrt[3]{5+\frac{1}{16}}}{7\sqrt[3]{5-\frac{10}{27}} \cdot \frac{4}{9}\sqrt{3+\frac{3}{8}}}.$$

Imamo:

$$5+\frac{4}{9} = \frac{49}{9}, \quad 5+\frac{1}{16} = \frac{81}{16};$$

brojnik je jednak

$$4 \cdot \frac{7}{3} : \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{9}{4}\right) = \frac{28}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{56}{9},$$

nadalje je

$$5-\frac{10}{27} = \frac{125}{27}, \quad 3+\frac{3}{8} = \frac{27}{8};$$

zato je nazivnik jednak

$$7 \cdot \frac{5}{3} \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{3}{2} = \frac{70}{9} \quad \text{i} \quad A = \frac{56}{9} : \frac{70}{9} = \frac{4}{5}.$$

3. Pokaži da je

$$\frac{0{,}2^2 \cdot 0{,}3^4 \cdot \sqrt[3]{0{,}064^2} \cdot \sqrt[3]{0{,}027^2}}{0{,}06^4 \cdot \sqrt{0{,}0016} \cdot \sqrt[4]{0{,}0081}} = 30.$$

4. $A = 6x^3 - \{-[4x-(-3x^3-4x^2+6)]-2x^3\}$.

Pokus za $x = 4$.

Ako u nekom brojnom izrazu dolaze zagrade, to se zagrada možemo riješiti postepeno, t. j. najprije okruglih, zatim uglastih i napokon vitičastih, ali i također svih odjednom.

Radimo li na drugi način, izlazi odmah

$A = 6x^3 + 4x^2 + 4x + 3x^3 + 4x^2 - 6 + 2x^3 = 11x^3 + 8x^2 + 4x - 6.$

Pokus za $x = -4$; imamo

$A = 6(-64) - \{-4(-4)^2 - [-16 - (-3(-4)^3 - 4(-4)^2 + 6)] - 2(-64)\} = -384 - \{-64 - [-16 - (192 - 64 + 6)] - 2(-64)\} = -384 - \{-64 - [-16 - 134] + 128\} = -384 - \{-64 + 150 + 128\} = -384 - 214 = -598$; a s druge strane $11x^3 + 8x^2 + 4x - 6$ za $x = 4$ jednako $11(-64) + 8(+16) - 16 - 6 = -704 + 128 - 22 = -726 + 128 = -598$.

5. $A = (2x^2 - 3x - 4)^2 - x(x-2)^3 - (x-2)^2(x+2)^2$. Pokus za $x = -3$.

Prvi se izraz može pisati $[(2x^2 - 3x) - 4]^2$, iz drugoga i trećega možemo izlučiti zajednički faktor $(x-2)^2$, pa imamo

$A = [2x^2 - 3x) - 4]^2 - (x-2)^2(x^2 - 2x + x^2 + 4x + 4) = 4x^4 - 12x^3 + 9x^2 - 16x^2 + 24x + 16 - (x^2 - 4x + 4)(2x^2 + 2x + 4) = 4x^4 - 12x^3 + 9x^2 - 16x^2 + 24x + 16 - 2x^4 + 8x^3 - 8x^2 - 2x^3 + 8x^2 - 8x - 4x^2 + 16x - 16 = 2x^4 - 6x^3 - 11x^2 + 32x = x(2x^3 - 6x^2 - 11x + 32)$.

Pokus: Stavimo li $x = -3$ u zadatak, imamo

$A = (18 + 9 - 4)^2 - (-3)(-125) - 25 = 529 - 375 - 25 = 129$; stavimo li to u rezultat, izlazi $(-3)(-54 - 54 + 33 + 32) = (-3)(-108 + 65) = (-3)(-43) = 129$.

6. $A = (3a - 4b + 5c)^2 - (5a - 6b - 8c)^2$.

$A = [(3a - 4b) + 5c]^2 - [(5a - 6b) - 8c]^2 = 9a^2 - 24ab + 16b^2 + 30ac - 40bc + 25c^2 - 25a^2 + 60ab - 36b^2 + 80ac - 96bc - 64c^2 = -16a^2 + 36ab - 20b^2 + 110ac + 130bc - 39c^2$.

Izraz A može se izračunati također po formuli za razliku kvadrata:

$$B^2 - C^2 = (B + C)(B - C) \qquad \text{pa je}$$

$A = (8a - 10b - 3c)(-2a + 2b + 13c) = 16a^2 + 20ab + 6ac + 16ab - 20b^2 - 6bc + 104ac - 130bc - 39c^2 = -16a^2 + 36ab - 20b^2 + 110ac - 136bc - 39c^2$.

7. $A = -(-2a^2 - 3b^2)^2 - (-4a^2 - 5b^2)^2 - (-3a^2 - 5b^2)(5b^2 - 3a^2)$.

Pokus za $a = -2$, $b = -3$.

Imamo

$A = -(4a^4 + 12a^2b^2 + 9b^4) - (16a^4 + 40a^2b^2 + 25b^4) - (9a^4 - 25b^4) = -4a^4 - 12a^2b^2 - 9b^4 - 16a^4 - 40a^2b^2 - 25b^4 - 9a^4 + 25b^4 = -29a^4 - 52a^2b^2 - 9b^4$.

Za $a = -2$, $b = -3$, $A = -(-8-27)^2 - (-16-45)^2 - (-12-45)(45-12) = -1225 - 3721 + 1881 = -3065$; uvrstimo li te brojeve u rezultat, imamo

$$-464 - 1872 - 729 = -3065.$$

Geometrija

Vježbe u Pitagorinom poučku

Pitagorin se poučak primjenjuje u mnogim zadacima iz matematike, koji se uče u svim razredima gimnazija i stručnih škola; zato je potrebno, da se učenici već zarana priuče na to da ga moraju sigurno primjenjivati. Poznato je, ako je c hipotenuza, a i b su katetete, da je $c = \sqrt{a^2 + b^2}$, $a = \sqrt{c^2 - b^2}$, $b = \sqrt{c^2 - a^2}$. Riječima!

Donosimo neke zadatke, kojih rješenje zahtijeva primjenu Pitagorina poučka.

1. U istokračnom trokutu zadan je opseg $o = 200\ cm$, $b = 52\ cm$; kolika je površina?

Baza će se izračunati, da se od opsega oduzme dvostruki krak, dakle je

$$a = 200 - 104 = 96\ cm;$$

zato je

$$v = \sqrt{b^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{52^2 - 48^2} = \sqrt{100 \cdot 4} = 20\ cm,$$

i površina je $\frac{1}{2} 96 \cdot 20 = 960\ cm^2$.

2. Nad stranicama istokračna trokuta $a = 20\ cm$ nacrtani su kvadrati i spojeni slobodni vrhovi kvadrata. Kolika je površina tako nastalog 6-trokuta!

Nastala su 3 kvadrata i 3 istokračna trokuta, kojima je kut na vrhu 120°. Površina svakog od tih trokuta je

$$\frac{2 \cdot \sqrt{300}}{2} \cdot 10 = 100\sqrt{3},$$

pa je površina šesterokuta

$$\frac{20^2}{4}\sqrt{3} + 3 \cdot 400 + 3 \cdot 100\sqrt{3} =$$

$$= 400\sqrt{3} + 1200 = 400(3 + \sqrt{3}).$$

3. Izračunaj površinu romba stranice $a = 16\ cm$ i $\alpha = 45°$.

Visina v romba izlazi iz relacije

$$v^2 + v^2 = a^2 \qquad \text{ili}$$

$$v^2 = \frac{a^2}{2},\ v = \frac{a}{\sqrt{2}} = \frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{16\sqrt{2}}{2} = 8\sqrt{2},$$

zato je površina $16 \cdot 8\sqrt{2} = 128\sqrt{2}$.

4. Dijagonale se romba odnose kao 5 i 12, njegova je površina 120 cm^2. Kolika je stranica i koliki je polumjer upisane kružnice?

Kako je $e : f = 5 : 12$ to je $e = \frac{5f}{12}$, s druge strane površina je $\frac{ef}{2} = 120$ ili ako uvrstimo izraz za e,

$$\frac{5f^2}{24} = 120,\quad f^2 = \frac{2880}{5} = 576,\quad f = 24\ cm;$$

stranica je romba

$$a = \sqrt{\left(\frac{e}{2}\right) + \left(\frac{f}{2}\right)^2} = \sqrt{5^2 + 12^2} =$$

$$= \sqrt{169} = 13\ cm;$$

polumjer upisane kružnice jednak je $\frac{1}{2}$ visine romba; kako je $a \cdot 2\rho = 120$, to je

$$\rho = \frac{120}{26} = \frac{60}{13}\ cm.$$

5. Dva se jednaka kruga polumjera $r = 12\ cm$ sijeku tako da jedan ide središtem drugoga; kolika je njihova zajednička površina?

Zajednička površina $2\left(\frac{r^2\pi \cdot 120°}{360°} - \frac{r^2}{4}\sqrt{3}\right)$

$$= \frac{r^2}{6}(4\pi - 3\sqrt{3}) \approx 176{,}832\ cm^2.$$

6. Dijagonale pravokutnika čine kut od 60° nasuprot bazi; baza mu je $a = 6\ cm$; kolika je visina i dijagonala?

Ako se obje dijagonale sijeku u E, to je trokut ABE istostraničan i njegova je visina jednaka polovini visine pravokutnika. Zato je $\frac{6}{2}\sqrt{3} = \frac{1}{2}b$ ili $b = 6\sqrt{3}$; dijagonala je jednaka $\sqrt{6^2 + (6\sqrt{3})^2} = 12\ cm$, a površina je $36\sqrt{3}\ cm^2$.

7. Baza je pravokutnika $a = 80\ cm$, opseg opisane kružnice je $o = 257{,}48\ cm$; kolika je ploština pravokutnika?

Kako je $d\pi = 256{,}48$, to je

$$d = \frac{257{,}48}{3{,}14} = 82\ cm,$$

visina je

$$\sqrt{82^2 - 80^2} = \sqrt{162 \cdot 2} = 18\ cm,$$

a površina je $80 \cdot 18 = 1440\ cm^2$.

Математичка укрштеница

МИЛИВОЈ БРУСИН, уч. 8 р. г. Зрењанин (1957—1958)

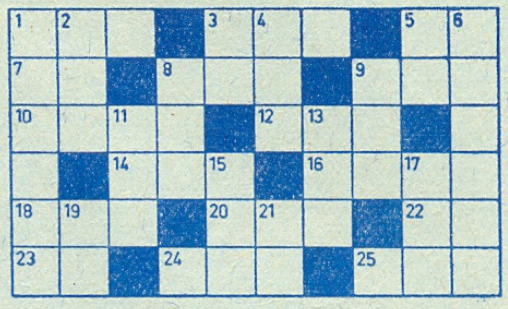
У свако квадратно поље не долази по једно слово, већ по једна арапска цифра! Децималне запете не треба уносити.

Водоравно:

1. Геометриска средина бројева 37 и 333.
3. Површина омотача правилне тростране пирамиде код које је висина основе $h = 6\sqrt{3}$, а бочна ивица $s = \sqrt{85}$.
5. Збир решења система једначина $x + 6y = 15$, $x + 12y = 9$.
7. Површина равнокраког трапеза чија је једна основица 6, висина 6, а бочна страна 10.
8. Троцифрени број чије цифре (читане с лева у десно) чине геометриску прогресију с количником $q = 2$. Збир прве и треће цифре је 10.
9. Број минута у углу код кога је $\cos\alpha = 0{,}98207$.
10. Најмањи заједнички садржилац бројева 209 и 133.
12. Највећи заједнички чинилац бројева 10296 и 6552.
14. Збир првих 10 чланова аритметичке прогресије код које је $a_1 = 12$, $d = \frac{7}{3}$.
16. *log* 5224.
18. Вредност израза $(x^3 - 13x^2 + 4x + 20) : (x^2 - 21x - 196)$ за $x = 31$.
20. Квадрат дијагонале d_2 ромба код кога је $a = 7{,}3$ и $d_1 = 9{,}6$.
22. Позитивна вредност параметра a из једначине $x^2 + ax + 5a + \frac{189}{4} = 0$ ако је $x_1 = x_2$.
23. Производ координата пресека праве $x - 2y + 2 = 0$ и праве која је нормална на њу а пролази тачком $A(5{,}6)$.
24. Број чији је логаритам 2,91222.
25. Површина праве купе ($r = 11$, $s = 12$) умањена π пута.

Усправно:

1. $\sqrt[3]{6}$.
2. Производ решења система $x+3y-2z = -11$. $x+y+z = 19$, $x-4y+z = 4$.
3. *log* 16384 с обзиром на базу 2.
4. Квадрат збира координата темена параболе $y = x^2 + 18x + 73$.
5. Квадрат растојања тачака $A\left(1\frac{1}{2}, 2\right)$ и $B\left(5\frac{1}{2}, 5\right)$.
6. $3 : 4\pi$.
8. Број од кога 15 % износи 34,8.



9. $\sqrt[3]{296\,740\,963}$.
11. Трећа страна троугла код којег је $a = 4$, $b = 5{,}41$, $\gamma = 81° 25' 21''$.
13. Троцифрени број са збиром цифара 7. Прве две цифре су једнаке. Ако средња и посљедња промене места добијени број је за 18 мањи од траженог.
15. Обичан разломак (написан прво бројилац па именилац) који претставља периодичан број 0,454545 . . .
17. Најмањи троцифрен број који је куб природног броја.
19. Ивица коцке којој је дијагонала $D = 5, 4\sqrt{3}$.
21. Вредност за $x_1 = x_2$ из једначине под 22. водоравно, помножена с -2.

Решење послати до 15. XI. 1958. На куверти назначити: „Математичка укрштеница“. Између ученика који правилно реше укрштеницу, ждребом ће се одредити њих 10 и наградити математичким књигама. Решење укрштенице објавит ће се у наредном броју.

Укрштеница се не мора изрезивати; довољно је решење на посебном папиру, читљиво потписаном.

Rješenja, dopise i članke slati na Uredništvo **»Matem.-fiz. lista«, Zagreb, Ilica 16/III., pošt. pretinac 165.**

Svim suradnicima!

Svi rukopisi (osim učeničkih rješenja) treba da budu napisani pisaćim strojem, a crteži izrađeni tušem na posebnom čvrstom papiru. Rukopisi se ne vraćaju.

Rješavateljima zadataka

U rješenjima treba uvijek napisati i sam zadatak s rednim brojem, ne pozivajući se na broj i datum »Mat.-fiz. lista«, u kome je bio postavljen. Svako rješenje zadataka pisati na posebnom papiru (četvrtini ili pola arka) i to samo na jednoj strani papira. — Svako rješenje treba čitljivo potpisati (ime i prezime), naznačujući razred, školu i mjesto. Nečitljiva i neuredna rješenja ne će se uopće uzeti u obzir.

Umoljavaju se rješavatelji, da samostalno rješavaju zadatke ne tražeći nikako pomoći od nastavnika, a niti od koga drugoga. Umoljavaju se također rješavatelji, da propisno frankiraju listove, koje šalju našoj redakciji.

Savez Društava matematičara i fizičara FNRJ izdaje časopis

NASTAVA MATEMATIKE I FIZIKE

Pretplata iznosi za članove društava matematičara i fizičara 300 Din, a za škole i biblioteke 400 Din. Pretplatu i narudžbe slati (sa naznakom za časopis »Nastava mat. i fiz.«) na žiro račun »Nastave matematike i fizike« 101-701-5-1262, Beograd.

Za Narodnu Republiku Hrvatsku pretplata se šalje na ček. upl. 400-73-3-1133 ili uputnicom Hrv. prirodosl. društvo, Zagreb, Ilica 16/III. kat uz naznaku da je za »Nastavu«

DRUŠTVO MATEMATIČARA I FIZIČARA NR HRVATSKE IZDAJE ČASOPIS

GLASNIK

MATEMATIČKO-FIZIČKI I ASTRONOMSKI

Pretplata za 1958. godinu iznosi Din 480 i šalje se na administraciju GLASNIKA:
Hrvatsko prirodoslovno društvo — Zagreb, Ilica 16/III.
Čekovni račun 400-73-3-1077 za Društvo matematičara i fizičara NRH
Godišnja članarina za Društvo je Din 240. — Članovi primaju Glasnik uz nadoplatu Din 240

ВЕСНИК ДРУШТВА МАТЕМАТИЧАРА И ФИЗИЧАРА НР СРБИЈЕ

Претплата од 400 Дин шаље се Друштву мат. и физ. НР Србије, Београд преко чек. рачуна 101-707-3-119 (уз назнаку да је за »Весник«). Сву преписку слати на адресу Друштва, Београд, пошт. фах. 791.